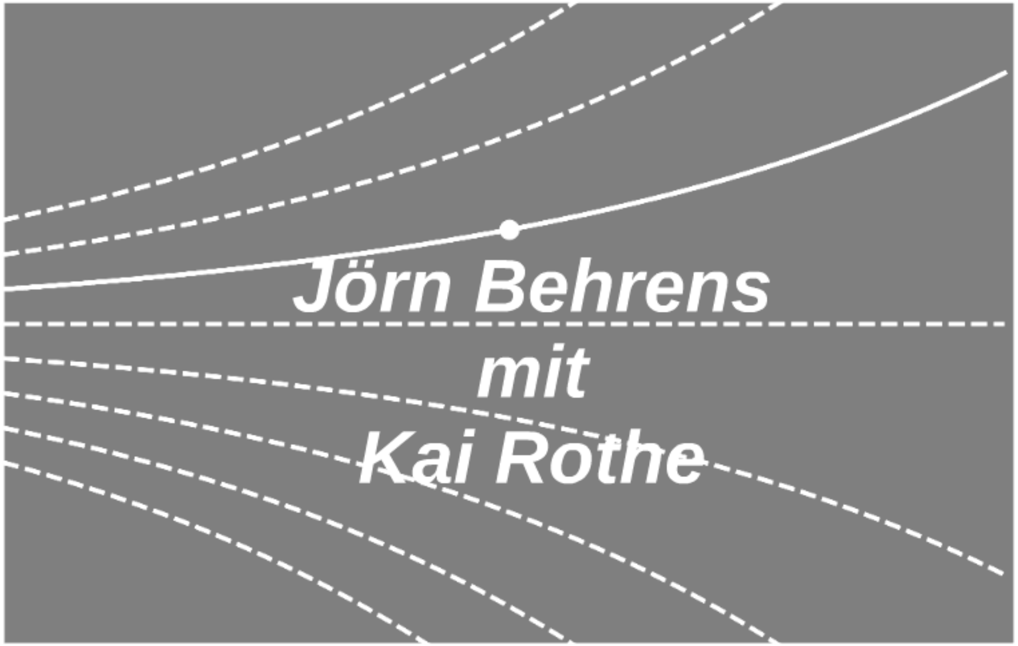
Differentialgleichungen I

Winter 2017/2018



Weitere Lösungsverfahren für lineare DGLn

Buch Kapitel 6.8

Wo wir jetzt stehen

Satz: (Lösbarkeit einer linearen DGL n-ter Ordnung)
Seien Funktionen $a_i(x)$, $i = 0, \dots, n-1$ und $g(x)$ stetig auf $]a, b[$.

1. Dann gibt es ein auf $]a, b[$ definiertes Fundamentalsystem $y_1, \dots, y_n$ von
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_0(x) y = 0$$
und jede Lösung $y_h(x)$ dieser homogenen DGL besitzt die Form
$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$
mit geeigneten Koeffizienten $c_1, \dots, c_n$.
2. Je n Lösungen der homogenen DGL bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
3. Sei $y_p(x)$ für $x \in]a, b[$ eine partikuläre Lösung von
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_0(x) y = g(x)$$
Ist $y_1, \dots, y_n$ Fundamentalsystem der homogenen DGL, so sind durch
$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}$$
alle Lösungen der linearen inhomogenen DGL n-ter Ordnung erfasst.
4. Ist $\xi \in]a, b[$ und $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$, so gibt es genau eine Lösung $y(x)$ der inhomogenen DGL, welche die Anfangsbedingungen
$$y(\xi) = \eta_0, \ y'(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$
erfüllt. Die Lösung existiert im gesamten Intervall $]a, b[$.

Satz: (Lösungen von DGL Systemen mit konstanten Koeffizienten)
Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$ Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) $\mathbf{v}$.
Dann ist
$$\mathbf{y} = e^{\lambda x} \mathbf{v}$$
eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen
$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$
ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination
$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i$$
sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)
Es seien gegeben:

- $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ Fundamentalsystem auf $]a, b[$.
- Die Matrix $Y(x) = [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n]$.
- Inhomogenes System $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$ mit g komponentenweise stetig.

Dann ist
$$\mathbf{y}_p = Y(x) \cdot \mathbf{c}(x)$$
partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei $\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{c}'(x)\, dx$ und $\mathbf{c}'(x) = (c_1'(x), \dots, c_n'(x))^{\mathsf{T}}$ Lösung des Gleichungssystems
$$Y(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{g}.$$

Zusammenfassend: (Matrix-Exponentiallösung)
Die Abbildung $\mathbf{y}(x) = e^{xA}\mathbf{y}(0)$ ist Lösung des DGL-Systems
$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$
Dabei ist
$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

Satz: (Lösbarkeit einer linearen DGL n-ter Ordnung)
Seien Funktionen $a_i(x)$, $i = 0, \dots, n-1$ und $g(x)$ stetig auf $]a, b[$.

1. Dann gibt es ein auf $]a, b[$ definiertes Fundamentalsystem $y_1, \dots, y_n$ von

   $$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

   und jede Lösung $y_h(x)$ dieser homogenen DGL besitzt die Form

   $$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

   mit geeigneten Koeffizienten $c_1, \dots, c_n$.

2. Je n Lösungen der homogenen DGL bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

3. Sei $y_p(x)$ für $x \in]a, b[$ eine partikuläre Lösung von

   $$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x)$$

   Ist $y_1, \dots, y_n$ Fundamentalsystem der homogenen DGL, so sind durch

   $$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

   alle Lösungen der linearen inhomogenen DGL n-ter Ordnung erfasst.

4. Ist $\xi \in]a, b[$ und $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$, so gibt es genau eine Lösung $y(x)$ der inhomogenen DGL, welche die Anfangsbedingungen

   $$y(\xi) = \eta_0,\ y'(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

   erfüllt. Die Lösung existiert im gesamten Intervall $]a, b[$.

en Koeffizienten)

Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)
Es seien gegeben:

- $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ Fundamentalsystem auf $]a, b[$,
- Die Matrix $Y(x) = [\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n]$,
- Inhomogenes System $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$ mit g komponentenweise stetig.

Dann ist

$$\mathbf{y}_p = Y(x) \cdot \mathbf{c}(x)$$

partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei $\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{c}'(x)\, dx$
und $\mathbf{c}'(x) = (c_1'(x), \ldots, c_n'(x))^\top$ Lösung des Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{g}.$$

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)
Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$-Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) $\mathbf{v}$.
Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x}\mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x}\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}\mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Zusammenfassend: (Matrix-Exponentiallösung)
Die Abbildung $\mathbf{y}(x) = e^{xA}\mathbf{y}(0)$ ist Lösung des DGL-Systems

$$\mathbf{y} = A\mathbf{y}.$$

Dabei ist

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

Reduktionsprinzip

Prinzip: (Reduktion der Ordnung einer Differentialgleichung)
Sei $u(x) \neq 0$ eine Lösung der linearen DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0.$$

Dann führt der Produkt-Ansatz $y(x) = v(x)u(x)$ auf eine homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung $n-1$ für $w := v'$:

$$w^{(n-1)} + b_{n-1}(x)w^{(n-2)} + \cdots + b_1(x)w = 0.$$

Ist $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ein Fundamentalsystem der DGL $n-1$-ter Ordnung und sind $v_1, \ldots, v_{n-1}$ Stammfunktionen von $w_1, \ldots, w_{n-1}$, so bilden

$$u, uv_1, \ldots, uv_{n-1}$$

ein Fundamentalsystem der DGL n-ter Ordnung.

Prinzip: (Reduktion der Ordnung einer Differentialgleichung)
Sei $u(x) \neq 0$ eine Lösung der linearen DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0.$$

Dann führt der Produkt-Ansatz $y(x) = v(x)u(x)$ auf eine homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung $n-1$ für $w := v'$:

$$w^{(n-1)} + b_{n-1}(x)w^{(n-2)} + \cdots + b_1(x)w = 0.$$

Ist $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ein Fundamentalsystem der DGL $n-1$-ter Ordnung und sind $v_1, \ldots, v_{n-1}$ Stammfunktionen von $w_1, \ldots, w_{n-1}$, so bilden

$$u, uv_1, \ldots, uv_{n-1}$$

ein Fundamentalsystem der DGL n-ter Ordnung.

Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition: (Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)
Seien $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n-1$. Dann ist

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = g(x).$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Bemerkungen

- Bei den linearen DGLn bzw. DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten existiert eine konstruktive Lösungstheorie!
- Definiert den linearen Differentialausdruck (oder -operator)

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y,$$

  dann lässt sich die Gleichung in der Definition abkürzen zu $L[y] = g(x)$.
- Bezeichne (bei Eindeutigkeit) die Gleichungen als *homogene DGL n-ter Ordnung* bzw. *inhomogene DGL n-ter Ordnung*.

Beobachtung:

- Betrachte homogene DGL n-ter Ordnung.
- Ansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

- Es gilt: $y^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k}e^{\lambda x} = \lambda^k e^{\lambda x}$ und $y = e^{\lambda x} \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$.
- Daher ist $y = e^{\lambda x}$ genau dann Lösung ($y = 0$), wenn λ Nullstelle ist von

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

Definition: (Charakteristisches Polynom)
Das soeben definierte Polynom $P(\lambda)$ heißt charakteristisches Polynom der homogenen Differentialgleichung $L[y] = 0$.
Die Nullstellengleichung $P(\lambda) = 0$ heißt zugehörige charakteristische Gleichung.

Lösungsansatz:
Untersuchung des Nullstellenverhaltens von $P(\lambda)$ ergibt folgende Fälle:

1. $P(\lambda)$ besitzt n verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
2. $P(\lambda)$ besitzt eine komplexe Nullstelle λ_k.
3. $P(\lambda)$ besitzt eine (reelle oder komplexe) r-fache Nullstelle λ_1 ($r \geq 2$).

Zusammenfassung.
Ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen DGL, dann gilt:

1. Hat λ die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \dots, y_r(x) = x^{r-1}e^{\lambda x}$$

   Fundamentallösungen der DGL.
2. Ist $\lambda = a + ib$ komplex und hat die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$z_1(x) = e^{\lambda x}, \dots, z_r(x) = x^{r-1}e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad \bar{z}_1(x) = e^{\bar{\lambda} x}, \dots, \bar{z}_r(x) = x^{r-1}e^{\bar{\lambda} x}$$

   komplexe Fundamentallösungen. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax}\cos bx, \dots, y_r(x) = x^{r-1}e^{ax}\cos bx \\ y_{r+1}(x) &= e^{ax}\sin bx, \dots, y_{2r}(x) = x^{r-1}e^{ax}\sin bx \end{aligned}$$

   reelle Fundamentallösungen der homogenen DGL sind.

Definition: (Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)
Seien $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Dann ist

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g(x).$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Bemerkungen:

- Bei den linearen DGLn bzw. DGL Systemen mit konstanten Koeffizienten existiert eine konstruktive Lösungstheorie!
- Definiere den linearen Differentialausdruck (oder -operator)

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y,$$

  dann lässt sich die Gleichung in der Definition abkürzen zu $L[y] = g(x)$.
- Bezeichne (bei Eindeutigkeit) die Gleichungen als *homogene DGL n-ter Ordnung*, bzw. *inhomogene DGL n-ter Ordnung*.

Beobachtung:

- Betrachte homogene DGL n-ter Ordnung.
- Ansatz:
$$y(x) = e^{\lambda x}.$$
- Es gilt: $y^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} e^{\lambda x} = \lambda^k e^{\lambda x}$ und $y = e^{\lambda x} \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$.
- Daher ist $y = e^{\lambda x}$ genau dann Lösung ($g = 0$), wenn λ Nullstelle ist von
$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Definition: (Charakteristisches Polynom)
Das soeben definierte Polynom $P(\lambda)$ heißt charakteristisches Polynom der homogenen Differentialgleichung $L[y] = 0$.
Die Nullstellengleichung $P(\lambda) = 0$ heißt zugehörige charakteristische Gleichung.

Lösungsansatz:
Untersuchung des Nullstellenverhaltens von $P(\lambda)$ ergibt folgende Fälle:

1. $P(\lambda)$ besitzt n verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
2. $P(\lambda)$ besitzt eine komplexe Nullstelle λ_k.
3. $P(\lambda)$ besitzt eine (reelle oder komplexe) r-fache Nullstelle λ_1 $(r \geq 2)$.

Zusammenfassung:
Ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen DGL, dann gilt:

1. Hat λ die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \ldots, y_r(x) = x^{r-1} s^{\lambda x}$$

   Fundamentallösungen der DGL.

2. Ist $\lambda = a + ib$ komplex und hat die algebraische Vielfachheit $r \geq 1$, dann sind

$$z_1(x) = e^{\lambda x}, \ldots, z_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad w_1(x) = e^{\bar{\lambda} x}, \ldots, w_r(x) = x^{r-1} e^{\bar{\lambda} x}$$

   komplexe Fundamentallösungen. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \cos bx, \ldots, y_r(x) = x^{r-1} a^{ax} \cos bx \\ y_{r+1}(x) &= e^{ax} \sin bx, \ldots, y_{2r}(x) = x^{r-1} a^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

   reelle Fundamentallösungen der homogenen DGL sind.

Bemerkungen:

Bemerkungen:

- Man findet, dass stets n linear unabhängige Lösungen $y_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ existieren.
- Diese Lösungen bilden ein Fundamentalsystem (Nachweis über $W(x) \neq 0$ für Lösungen der Form $y_k(x) = c_k e^{\lambda_k x}$)

Inhomogene DGL n-ter Ordnung

Vorbemerkungen:

- Betrachte beispielhaft

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x).$$

- Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ lin. unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung (d.h. $g(x) = 0$).
- Also gilt

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

- Die Lösungen der homogenen Gleichung lauten dann

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Zusammenfassung: (Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung)
Betrachte die inhomogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x).$$

Dann lässt sich die allgemeine Lösung angeben als

$$y(x) = \left[C_1 - \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx\right] y_1(x) - \left[C_2 + \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx\right] y_2(x).$$

Bemerkung: Setze $C_3 = C_4 = 0$ da nur irgendeine Lösung gesucht ist.

Verallgemeinerung: (Lösung der inhomogenen DGL n-ter Ordnung)

- Für Gleichung n-ter Ordnung erhalten wir lin. unabhängige Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ der homogenen Gleichung und variieren $C_1(x), \ldots, C_n(x)$.
- Entsprechend muss man die Annahmen treffen

$$C_1'(x)y_1^{(k)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(k)} = 0 \quad (k = 0, \ldots, n-2).$$

- Außerdem erhalten wir

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = g(x).$$

- Es ergibt sich also ein lin. Gleichungssystem für $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

  Bemerkung: Wronksi-Matrix ist regulär, also lösbar!

- Integration führt dann zur gesuchten Lösung.

Vorbemerkungen:

- Betrachte beispielhaft

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x).$$

- Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ lin. unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung (d.h. $g(x) = 0$).
- Also gilt

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

- Die Lösungen der homogenen Gleichung lauten dann

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Zusammenfassung: (Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung)
Betrachte die inhomogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x).$$

Dann lässt sich die allgemeine Lösung angeben als

$$y(x) = \left[C_1 - \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx\right] y_1(x) + \left[C_2 + \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx\right] y_2(x).$$

Bemerkung: Setze $C_3 = C_4 = 0$ da nur irgendeine Lösung gesucht ist.

Verallgemeinerung: (Lösung der inhomogenen DGL n-ter Ordnung)

- Für Gleichung n-ter Ordnung erhalten wir lin. unabhängige Lösungen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ der homogenen Gleichung und variieren $C_1(x), \ldots, C_n(x)$.
- Entsprechend muss man die Annahmen treffen

$$C_1'(x)y_1^{(k)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(k)} = 0 \quad (k = 0, \ldots, n-2).$$

- Außerdem erhalten wir

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = g(x).$$

- Es ergibt sich also ein lin. Gleichungssystem für $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

  Bemerkung: Wronksi-Matrix ist regulär, also lösbar!

- Integration führt dann zur gesuchten Lösung.

Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Reduktionsprinzip

Differentialgleichungen I

Weitere Lösungsverfahren für lineare DGLn

Inhomogene DGL n-ter Ordnung

Wo wir jetzt stehen