Übertragung der Matrixexponentialfkt. auf DGL-Systeme:

Mit $B = xA$ erhält man

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(xA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k$$

und durch gliedweise Differentiation

$$(e^{xA})' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^k)'}{k!} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{x^{k-1}}{k!} A^k = A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1}$$

$$= A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k = A e^{xA}$$

Damit folgt: $y(x) = e^{xA} y(0)$ ist Lösung von $y' = Ay$.

Nov 21-16:02

Ist λ ein Eigenwert (EW) von A mit Eigenvektor (EV) $\bar{v}$, also $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$, dann folgt

$$e^{xA}\bar{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k \bar{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \lambda^k \bar{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\bar{v}$$

$$= e^{\lambda x}\bar{v}$$

$\Rightarrow$ Die Matrixexponentiallsg. erhält mit der Lösung des Eigenwertproblems für die Matrix A.

Hauptvektoren

Beachte: $e^{\lambda x E} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} E^k = e^{\lambda x} E$

Dann folgt für bel. $\lambda \in \mathbb{C}$:

Nov 21-16:23

$$e^{xA}\bar{v} = e^{\lambda x E + x(A-\lambda E)}\bar{v} = e^{\lambda x E}\cdot e^{x(A-\lambda E)}\bar{v}$$
$$= e^{\lambda x}\cdot E\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}(A-\lambda E)^j\bar{v}$$
$$= e^{\lambda x}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}(A-\lambda E)^j\bar{v}$$

Wenn $\bar{v}$ Hauptvektor als Lösung von $(A-\lambda E)^k\bar{v}=0$ ist, dann ergibt sich die <u>endliche</u> Summe

$$e^{xA}\bar{v} = e^{\lambda x}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^j}{j!}(A-\lambda E)^j\bar{v}$$

und man erkennt, dass $y = e^{xA}\bar{v}$ eine Hauptvektorlösung ist.

Nov 21-16:31

<u>Beispiel:</u> (Berechnung von Matrixexponentiallsg.)

gesucht: Lösung von

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} =: A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \text{mit } \bar{y}(0) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Es ergeben sich die Matrixpotenzen:

$$A^0 = E, \quad A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, \quad A^4 = A^2\cdot A^2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$A^5 = A^4\cdot A = A, \quad A^6 = A^2 \ \ldots, \quad A^{k+4} = A^k, \ k\geq 1$$

Damit ergibt sich die Matrixexponentiallsg:

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \left[E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \ldots\right]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}-\ldots & t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots\\ -t+\frac{t^3}{3!}-\frac{t^5}{5!}+\ldots & 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}-\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

Nov 21-16:43

Beweis zur Variation der Konstanten bei Systemen:

Unter $\int \bar{c}'(x)\,dx$ verstehen wir im Falle des Vektors $\bar{c}(x)$ die komponentenweise Integration, also

$$\int \bar{c}'(x)\,dx = \begin{pmatrix} \int c_1'(x)\,dx \\ \int c_2'(x)\,dx \\ \vdots \\ \int c_n'(x)\,dx \end{pmatrix}$$

Zum Beweis des Satzes differenzieren wir $\bar{y}_p(x)$:

$$\begin{aligned} \bar{y}_p'(x) &= (c_1(x)\bar{y}_1 + \dots c_n(x)\bar{y}_n)' \\ &= c_1'(x)\bar{y}_1 + \dots c_n'(x)\bar{y}_n + c_1(x)\bar{y}_1' + \dots + c_n(x)\bar{y}_n' \\ &= Y(x)\cdot\bar{c}'(x) + c_1(x)A\bar{y}_1 + \dots + c_n(x)A\bar{y}_n \\ &= Y(x)\cdot\bar{c}'(x) + A(c_1(x)\bar{y}_1 + \dots + c_n(x)\bar{y}_n) \\ &= Y(x)\cdot\bar{c}'(x) + A\,\bar{y}_p(x) \end{aligned}$$

Da $Y(x)\cdot\bar{c}'(x) = \bar{g}$ folgt

$\bar{y}_p'(x) = A\,\bar{y}_p(x) + \bar{g}$ und damit die Aussage des Satzes. $\square$

Nov 21-16:59