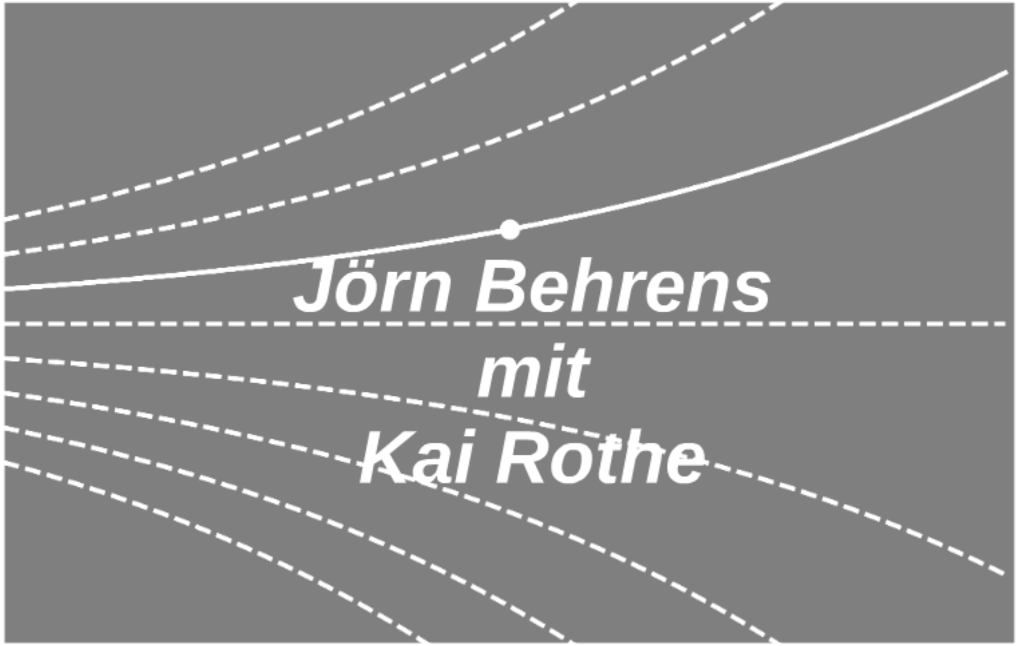
Differentialgleichungen I

Winter 2017/2018



Trennung der Variablen
Variation der Konstanten

Buch Kapitel 6.4-6.5

Erinnerung

Definition (Gewöhnliche Differentialgleichung):
Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung (DGL n-ter Ordnung) für eine Funktion $y = y(x)$ ist eine Gleichung zwischen x, y und den Ableitungen von y bis einschließlich n-ter Ordnung:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \quad \text{(implizite Form)}$$

Liegt die Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von y vor, so erhält man die Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \quad \text{(explizite Form)}.$$

Bezeichne eine Funktion y, welche die DGL erfüllt als Lösung oder Integral der DGL.

2

Definition (Anfangs- und Randwerte):
Bedingungen an die Lösung einer DGL, die für genau einen Wert der unabhängigen Variablen gegeben sind, heißen Anfangsbedingungen, andernfalls Randbedingungen.

Ein Anfangswertproblem ist gegeben, wenn die Lösung einer DGL gesucht ist, die gegebenen Anfangsbedingungen genügt.
Entsprechend ist ein Randwertproblem gegeben, wenn die Lösung der DGL Randwerten genügen soll.

DGL 1. Ordnung:

- Sei die DGL 1. Ordnung in expliziter Form gegeben: $y' = f(x, y)$.
- Die Paare $x, y \in D_f$ liegen im Definitionsbereich von f

Definition (Gewöhnliche Differentialgleichung):
Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung (DGL n-ter Ordnung) für eine Funktion $y = y(x)$ ist eine Gleichung zwischen x, y und den Ableitungen von y bis einschließlich n-ter Ordnung:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad \text{(implizite Form)}$$

Liegt die Gleichung aufgelöst nach der höchsten Ableitung von y vor, so erhält man die Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{(explizite Form).}$$

Bezeichne eine Funktion y, welche die DGL erfüllt als Lösung oder Integral der DGL.

Definition (Anfangs- und Randwerte):
Bedingungen an die Lösung einer DGL, die für genau einen Wert der unabhängigen Variablen gegeben sind, heißen Anfangsbedingungen, andernfalls Randbedingungen.

Ein Anfangswertproblem ist gegeben, wenn die Lösung einer DGL gesucht ist, die gegebenen Anfangsbedingungen genügt.
Entsprechend ist ein Randwertproblem gegeben, wenn die Lösung der DGL Randwerten genügen soll.

DGL 1. Ordnung:

- Sei die DGL 1. Ordnung in expliziter Form gegeben: $y' = f(x, y)$.
- Die Paare $x, y \in D_f$ liegen im Definitionsbereich von f

DGL 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

Idee:
Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

so heist sie Differentialgleichung mit trennbaren Variablen.
Seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x, y) \in D_f$ stetig und $h(y) \neq 0$.

- Es existiert nach Existenzsatz mindestens eine Lösung.
- Seien
$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt, \quad \text{und} \quad H(y) = \int_b^y h(t)\,dt$$
Stammfunktionen zu g und h, sowie H^{-1} Umkehrfunktion von H (d.h. $H^{-1}(H(y)) = y$).
- Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ so ergibt Integration die Lösung der DGL:
$$H(y(x)) = G(x) + C$$
- Anwendung der Umkehrfunktion ergibt
$$y(x) = H^{-1}[H(y(x))] = H^{-1}[G(x) + C].$$

1

Lösungsschema:
Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

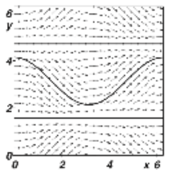
und seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x, y) \in D_f$ stetig, $h(y) \neq 0$, $G(x)$, $H(y)$ wie oben.

1. Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ bzw. $h(y)dy = g(x)dx$.
2. Integriere linke Seite nach y und rechte Seite nach x.
3. Falls möglich, löse analytisch nach y auf:
$$H(y) = G(x) + C.$$
Falls nicht möglich, liegt die Lösung $y(x)$ in impliziter Form vor.
4. Für $C = C_0 := H(y_0) - G(x_0)$ ergibt sich die Lösung des AWP $y(x_0) = y_0$.

Beispiel:
Betrachte

$$y' = \sin x \cos y.$$

- Beachte: $\cos y \neq 0$ oder $y \neq (k + \frac{1}{2})\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- Erhalte:
$$\frac{y'}{\cos y} = \sin x \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dy}{\cos y} = \int \sin x\,dx.$$
- Integration: $\ln|\tan(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4})| = -\cos x + C_1$
- Auflösung nach y:
$$y(x) = 2\arctan(Ce^{-\cos x}) - \frac{\pi}{2} \quad C \in \mathbb{R}$$
- Konstante Lösungen: $y(x) = (k + \frac{1}{2})\pi$
- Erinnerung: Richtungsfeld!



2

Idee:
Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

so heist sie Differentialgleichung mit trennbaren Variablen.
Seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x, y) \in D_f$ stetig und $h(y) \neq 0$.

- Es existiert nach Existenzsatz mindestens eine Lösung.
- Seien
$$G(x) = \int_a^x g(t)\ dt, \quad \text{und} \quad H(y) = \int_b^y h(t)\ dt$$
Stammfunktionen zu g und h, sowie H^{-1} Umkehrfunktion von H (d.h. $H^{-1}(H(y)) = y$).
- Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ so ergibt Integration die Lösung der DGL:
$$H(y(x)) = G(x) + C$$
- Anwendung der Umkehrfunktion ergibt

$$y(x) = H^{-1}[H(y(x))] = H^{-1}[G(x) + C].$$

Lösungsschema:
Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

und seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x, y) \in D_f$ stetig, $h(y) \neq 0$, $G(x)$, $H(y)$ wie oben.

1. Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ bzw. $h(y)dy = g(x)dx$.

2. Integriere linke Seite nach y und rechte Seite nach x.

3. Falls möglich, löse analytisch nach y auf:

$$H(y) = G(x) + C.$$

   Falls nicht möglich, liegt die Lösung $y(x)$ in impliziter Form vor.

4. Für $C = C_0 := H(y_0) - G(x_0)$ ergibt sich die Lösung des AWP $y(x_0) = y_0$.

Beispiel:
Betrachte

$$y' = \sin x \cos y.$$

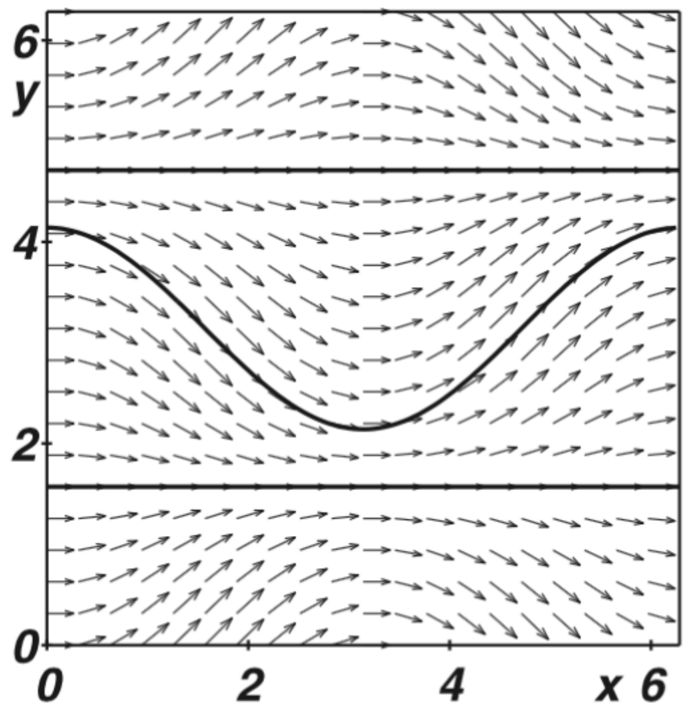
- Beachte: $\cos y \neq 0$ oder $y \neq (k + \frac{1}{2})\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- Erhalte:

$$\frac{y'}{\cos y} = \sin x \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dy}{\cos y} = \int \sin x \; dx.$$

- Integration: $\ln|\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})| = -\cos x + C_0$.
- Auflösung nach y:

$$y(x) = 2\arctan(Ce^{-\cos x}) - \frac{\pi}{2} \quad C \in \mathbb{R}$$

- Konstante Lösungen: $y(x) \equiv (k + \frac{1}{2})\pi$
- Erinnerung: Richtungsfeld!



Lineare DGL 1. Ordnung

Definition: (Lineare Differentialgleichung erster Ordnung)
Betrachte

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Seien die Koeffizienten $(a(x), b(x), c(x))$ stetig (aber nicht notwendig linear) auf einem Intervall I und $a(x) \neq 0$. Diese DGL heißt lineare DGL 1. Ordnung, wenn sie linear bezüglich der Lösung $y(x)$ ist, d.h. eine Linearkombination

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

zweier Lösungen ist wiederum Lösung der DGL.

Bemerkungen.

- Unter der Voraussetzung $a(x) \neq 0$ $(x \in I)$, ergibt sich
  $$y' + p(x)y = q(x)$$
  mit $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$ jeweils stetig.
- Existenz und Eindeutigkeit sind immer erfüllt (keine singulären Lösungen) sofern in I $p(x)$ und $q(x)$ stetig sind.
- Falls $q(x) = 0$ heißt die DGL homogen, andernfalls inhomogen.

Lösungsidee 1:
Die homogene lineare DGL $y' + p(x)y = 0$ ist ein Spezialfall einer DGL mit trennbaren Variablen!

Für $y > 0$ und $y < 0$ schreibe

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\int p(x)\,dx + C_0$$

mit $|y| = e^{C_0}e^{-P(x)}$ bzw. $y = Ce^{-P(x)}$ $(C \in \mathbb{R}, C \neq 0)$.
Dabei ist $P(x)$ Stammfunktion von $p(x)$.

Lösungsidee 2: (Variation der Konstanten)
Für die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL $y' + p(x)y = 0$ variiere C, d.h. betrachte $C = C(x)$.

- Ansatz:
  $$y(x) = C(x)e^{-P(x)}.$$
- Einsetzen:
  $$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x).$$
- Umformen und Integrieren:
  $$\begin{aligned} C'(x)e^{-P(x)} = q(x) \quad &\Rightarrow \quad C'(x) = q(x)e^{P(x)} \\ &\Rightarrow \quad C(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt + C_1 \quad C_1 = \text{konst.}, C_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
- Verwendung des Ansatzes:
  $$\begin{aligned} y(x) &= e^{-P(x)}\left(C_1 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt\right) \\ &= C_1e^{-P(x)} + e^{-P(x)}\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt \\ &= y_{hom}(x) + y_{inh}(x) \end{aligned}$$

Beobachtungen:

- Differentiation beweist:
  $$y_{inh}(x) = e^{-P(x)}\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt$$
  ist spezielle Lösung der inhomogenen DGL.
- Da
  $$y_{hom}(x) = C_1e^{-P(x)}$$
  allgemeine Lösung der homogenen DGL ist, ist $y(x) = y_{hom} + y_{inh}(x)$ für jedes $C_1 \in \mathbb{R}$ Lösung der inhomogenen DGL.
- Andererseits ist jede beliebige Lösung $\tilde{y}(x)$ der inhomogenen DLG von der Form oben.

Beispiel: (Bernoullische Differentialgleichung)

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

Definition: (Lineare Differentialgleichung erster Ordnung)
Betrachte
$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

Seien die Koeffizienten $(a(x), b(x), c(x))$ stetig (aber nicht notwendig linear) auf einem Intervall I und $a(x) \neq 0$. Diese DGL heißt lineare DGL 1. Ordnung, wenn sie linear bezüglich der Lösung $y(x)$ ist, d.h. eine Linearkombination

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

zweier Lösungen ist wiederum Lösung der DGL.

Bemerkungen:

- Unter der Voraussetzung $a(x) \neq 0$ $(x \in I)$, ergibt sich

  $$y' + p(x)y = q(x)$$

  mit $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$ jeweils stetig.

- Existenz und Eindeutigkeit sind immer erfüllt (keine singulären Lösungen) sofern in I $p(x)$ und $q(x)$ stetig sind..

- Falls $q(x) = 0$ heißt die DGL homogen, andernfalls einhomogen.

Lösungsidee 1:
Die homogene lineare DGL $y' + p(x)y = 0$ ist ein Spezialfall einer DGL mit trennbaren Variablen!

Für $y > 0$ und $y < 0$ schreibe

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\int p(x)\ dx + C_0$$

mit $|y| = e^{C_0}e^{-P(x)}$ bzw. $y = Ce^{-P(x)}$ $(C \in \mathbb{R}, C \neq 0)$.
Dabei ist $P(x)$ Stammfunktion von $p(x)$.

Lösungsidee 2: (Variation der Konstanten)
Für die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL $y' + p(x)y = 0$ variiere C, d.h. betrachte $C = C(x)$.

- Ansatz:
$$y(x) = C(x)e^{-P(x)}.$$

- Einsetzen:
$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x).$$

- Umformen und Integrieren:
$$\begin{aligned} C'(x)e^{-P(x)} = q(x) \quad &\Rightarrow \quad C'(x) = q(x)e^{P(x)} \\ &\Rightarrow \quad C(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\, dt + C_1 \quad C_1 \equiv \text{konst.}, C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Verwendung des Ansatzes:
$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-P(x)}\left(C_1 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\, dt\right) \\ &= C_1 e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\, dt \\ &= y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{inh}}(x). \end{aligned}$$

Beobachtungen:

- Differentiation beweist:

$$y_{\mathrm{inh}}(x) = e^{-P(x)} \int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, dt$$

ist spezielle Lösung der inhomogenen DGL.

- Da

$$y_{\mathrm{hom}}(x) = C_1 e^{-P(x)}$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL ist, ist $y(x) = y_{\mathrm{hom}} + y_{\mathrm{inh}}(x)$ für jedes $C_1 \in \mathbb{R}$ Lösung der inhomogenen DGL.

- Andererseits ist jede beliebige Lösung $\tilde{y}(x)$ der inhomogenen DLG von der Form oben.

Beispiel: (Bernoullische Differentialgleichung)

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

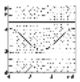
Differentialgleichungen I

Winter 2017/2018

Trennung der Variablen
Variation der Konstanten

DGL 1. Ordnung mit trennbaren Variablen

Lösungsschema:



Erinnerung

Lineare DGL 1. Ordnung