

## Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 4

#### Aufgabe 13:

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \mathbf{y} .$$

a) Man beweise durch Induktion für  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbf{A}^k = 5^{k-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-5)^{k-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} .$$

b) Man berechne die Matrix-Exponentiallösung  $e^{x\mathbf{A}}$  des Systems.

c) Man berechne das Fundamentalsystem über Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  und vergleiche das Ergebnis mit dem aus b).

#### Aufgabe 14:

a) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} .$$

b) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

(i) Man bestimme die allgemeine Lösung des homogenen Systems.

(ii) Man berechne eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems über Variation der Konstanten und alternativ über den speziellen Ansatz  $\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{a}$  mit  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ .

(iii) Man löse die Anfangswertaufgabe.

**Aufgabe 15:**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = -18.$$

- a) Man bestimme ein Fundamentalsystem mit dem Reduktionsverfahren.  
*Hinweis:* Es gibt eine polynomiale Lösung  $u(x) = ax + b$ .
- b) Man schreibe die Differentialgleichung um in ein System erster Ordnung und berechne eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung unter Verwendung der Variation der Konstanten.
- c) Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

**Aufgabe 16:**

- a) Für die Differentialgleichung  $y''' - 4y'' - 20y' + 48y = 0$ 
  - (i) berechne man die allgemeine reelle Lösung,
  - (ii) schreibe die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung um und
  - (iii) bestimme Eigenwerte, Eigenvektoren und eine Fundamentalmatrix des Systems.
- b) Man berechne die allgemeine reelle Lösung für folgende Differentialgleichungen:
  - (i)  $y''' - y'' - 15y' - 25y = 0$ ,
  - (ii)  $y'''' - 4y''' - 2y'' + 12y' + 9y = 0$ .

**Abgabetermin:** 11.12. - 15.12.2017 (zu Beginn der Übung)