Differentialgleichungen I
TUHH
VL 14, 31. Januar 2017

Randwert- und Eigenwertaufgaben

Michael Hinze

Eigenwertaufgaben für DGL'en 2ter Ordnung

$L[y] := -(py')' + qy$ mit $p \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $q \in \mathcal{C}^0([a,b])$

Die Aufgabe "Finde $\lambda \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$ mit

$$L[y](t) = \lambda\, y(t) \quad \forall_{t} \in (a,b)$$

und $y(a) = y(b) = 0$ "

heißt homogenes Eigenwert Problem (nach Sturm-Liouville)

Allgemeinere Randbedingungen $\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = r_1$, $\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = r_2$ möglich. Kap 6.13.2 Buch Bärwolff

Bsp: $p \equiv 1$, $q \equiv 0$: $-y''(t) = \lambda y(t)$ in $(0,1)$
$a = 0$, $b = 1$ $\quad y(0) = y(1) = 0$

Vergleiche Aufgabe zur Euler'schen Knicklast!

Allgemeine Lösung: char. Polynom $s(\mu) = -(\mu^2+\lambda) \stackrel{!}{=} 0$

$\mu_{1/2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ und reelles FS ist $y_1(t) = \cos\sqrt{\lambda}\, t$, $y_2(t) = \sin\sqrt{\lambda}\, t$

für $\lambda \geq 0$ (das fordern wir)

Damit

$$y(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t)$$

mit $0 \stackrel{!}{=} y(0) = c_1\, 1 + c_2\, 0 \implies c_1 = 0$

$0 \stackrel{!}{=} y(1) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, 1$, also $\lambda = 0 \implies c_2 = 0$

$\implies y(t) \equiv 0$

Triviale Lösung

$\lambda > 0$: dann $c_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0$, falls $\sqrt{\lambda} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

also $\lambda_k = k^2\pi^2$. Dann erfüllt

$$y_k(t) = c_2 \sin\sqrt{\lambda_k}\, t$$

$$-y_k''(t) = \lambda_k\, y_k(t) \quad \text{und} \quad y_k(0) = y_k(1)$$

Wir sagen: λ_k EW von $L[y] := -y''$ zur Eigenfunktion y_k.

Andere RBen $y(0)=0$, $y'(1)=0$ SgL

Eigenschaften von Eigenfunktionen

Betrachte L^2-Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$

z Bsp für $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b])$

Wir stellen fest: $y^1 \neq y^2$ Eigenfunktionen zu EWen $\lambda_1 \neq \lambda_2$

der Aufgabe $-y''(t) = \lambda y(t) \quad t \in (0,1) \quad y(0) = y(1) = 0.$

Dann gilt: $\langle y^1, y^2 \rangle = 0, \quad (*)$ d.h. y^1 orthogonal zu y^2.

D.h. $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist Orthogonalsystem bzgl $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Nachweis von $(*)$: $a=0 \quad b=1 \qquad -(y^2)''(t) = \lambda_2\, y^2(t)$

$$\int_0^1 y^1(t)\, y^2(t)\, dt \overset{\text{DGL}}{=} \frac{1}{\lambda_2} \int_0^1 y^1(t) \left(-(y^2)''(t)\right) dt$$

$$\overset{\text{part. Integr.}}{=} \frac{1}{\lambda_2} \int_0^1 (y^1)'(t)\,(y^2)'(t)\, dt - \underbrace{(y^2)' y^1 \Big|_0^1}_{=0 \text{ weil } y^1(0)=y^1(1)=0}$$

$$= \frac{1}{\lambda_2} \int_0^1 -(y^1)''(t)\, y^2(t)\, dt + \underbrace{(y^1)' y^2 \Big|_0^1}_{=0 \text{ weil } y^2(0)=y^2(1)=0}$$

$$\overset{\text{DGL}}{=} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \int_0^1 y^1(t)\, y^2(t)\, dt$$

$$\longrightarrow \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}_{\neq 0 \text{ weil } \lambda_1 \neq \lambda_2} \int_0^1 y^1(t)\, y^2(t)\, dt = 0 \Rightarrow y^1 \perp y^2$$

Hier ist $\{\sin k\pi\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_k = k^2\pi^2$ Eigensystem

Sei $f \in C^0([0,1])$. Dann $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, y_k \rangle y_k$

Entwicklung von f im Eigensystem $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

In unserem Bsp

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^1 f(s) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin k\pi s \, ds}_{b_k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin k\pi t$$

Fourierreihe von f (bzgl des orthonormierten Eigensystems

$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin k\pi t \right\}_{k\in\mathbb{N}}$

Nächstes Semester

Partielle Differentialgleichungen