Notizen zur Vorlesung “Differentialgleichungen I”

Henrik Schumacher

TUHH, 24. Januar 2017

1 Randwertaufgaben für Differentialoperatoren zweiter Ordnung

Zu Funktionen a_0, a_1 und $a_2 \in C^0([a,b])$ betrachten wir den *linearen Differentialoperator zweiter Ordnung*

$$D\colon C^2([a,b]) \to C^0([a,b]), \quad y \mapsto D[y] := a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y,$$

das heißt, der Funktion $y \in C^2([a,b])$ wird die Funktion $D[y]$ mit

$$D[y](t) = a_0(t)\, y''(t) + a_1(t)\, y'(t) + a_2(t)\, y(t)$$

zugeordnet. Zu gegebenen reellen Zahlen α_1, α_2, β_1 und β_2 betrachten wir außerdem den *Randwertoperator*

$$R\colon C^2([a,b]) \to \mathbb{R}^2, \quad y \mapsto R[y] := \begin{pmatrix} R_1[y] \\ R_2[y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) \\ \alpha_2\, y(b) + \beta_b\, y'(b) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Die *allgemeine Randwertaufgabe zweiter Ordnung* lautet wie folgt:
Zu gegebenem $r \in C^0([a,b])$ und zu gegebenen reellen Zahlen r_1 und r_2 finde $y \in C^2([a,b])$, das folgende Gleichungen erfüllt:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D[y](t) &=& r(t), \quad \text{für alle } t \in\,]a,b[, \\ R[y] &=& \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \tag{2}$$

Beispiel 1.1 (Ideales Kabel unter Last) Ein *ideales Kabel* (inextensibel und ohne Biegesteifigkeit) der Länge L werde waagerecht eingespannt und belastet. Die Form des Kabels werde durch den Graphen der Funktion $y \in C^2([0, L])$ mit Endpunkten $(0, 0)$ und $(L, 0)$ beschrieben, die (in negative y-Richtung wirkende) Kraftdichte am Punkt $(t, y(t))$ betrage $f(t)$. Im Kräftegleichgewicht ist die Krümmung der Kurve y proportional zur Last:

$$\kappa(t) = \frac{y''(t)}{\sqrt{1 + y'(t)^2}} = K\,f(t). \tag{3}$$

Das waagerechte Einspannen führt zu folgenden Randbedingungen

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(L) = 0.$$

Für kleine Auslenkungen (d. h. $\sup_{t\in[0,L]}|y'(t)|$ ist klein), gilt näherungsweise $\sqrt{1 + y'(t)^2} \approx 1$ und wir erhalten die lineare Randwertaufgabe

$$\begin{cases} y''(t) &= K\,f(t), \quad \text{für alle } t \in\,]0, L[, \\ y(0) &= 0, \\ y(L) &= 0. \end{cases} \tag{4}$$

1.1 Lösung durch Fundamentalsystem und partikuläre Lösung

Jede Lösung y der Randwertaufgabe (8) ist insbesondere eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $D[y] = r$ und kann daher dagestellt werden durch

$$y = c_1\,y_1 + c_2\,y_2 + y_{\text{part}}, \tag{5}$$

mit einem Fundamentalsystem y_1, y_2 der homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung $D[y] = 0$, einer partikulären Lösung y_{part} der inhomogenen Differentialgleichung $D[y] = r$ und mit geeignet gewählten Koeffizienten c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Fraglich ist aber, ob solche Koeffizienten bestimmbar und die Randwertaufgabe überhaupt lösbar ist. Einsetzen von (5) in die zweite Gleichung von (8) ergibt

$$R[c_1\,y_1 + c_2\,y_2 + y_{\text{part}}] = \begin{pmatrix} R_1[y_1]\,c_1 + R_1[y_2]\,c_2 + R_1[y_{\text{part}}] \\ R_2[y_1]\,c_1 + R_2[y_2]\,c_2 + R_2[y_{\text{part}}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten c_1 und c_2 und kann umgeschrieben werden zu

$$\begin{pmatrix} R_1[y_1] & R_1[y_2] \\ R_2[y_1] & R_2[y_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 - R_1[y_{\text{part}}] \\ r_2 - R_2[y_{\text{part}}] \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Man überlegt sich nun leicht, dass die Randwertaufgabe (8) genau dann lösbar ist, wenn das lineare Gleichungssystem (1.4) lösbar ist. Insbesondere ist (8) immer dann lösbar, wenn die Matrix $\begin{pmatrix} R_1[y_1] & R_1[y_2] \\ R_2[y_1] & R_2[y_2] \end{pmatrix}$ invertierbar ist.

Beispiel 1.2 (Ideales Kabel) Wir können dies jetzt auf Beispiel 1.1 anwenden. Als Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y''(t) = 0$ können wir $y_1(t) = 1$ und $y_2(t) = t$ verwenden und durch

$$y_{\text{part}}(t) = K \int_0^t \int_0^\tau f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau$$

ist eine partikuläre Lösung gegeben. Das lineare Gleichungssystem hat dann die Form

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(L) & y_2(L) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - y_{\text{part}}(0) \\ 0 - y_{\text{part}}(L) \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -C \end{pmatrix}$$

mit $C := K \int_0^L \int_0^\tau f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau$. Wir erhalten $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{C}{L}$ als Lösung dieses Systems. Die Lösung der Randwertaufgabe lautet daher

$$y(t) = -\frac{C}{L}\,t + K \int_0^t \int_0^\tau f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau.$$

Für ortsunabhängige Last $f(t) = f_0$ erhält man z. B. die Parabel

$$y(t) = -\frac{K f_0 L}{2}\,t + \frac{K f_0}{2} t^2.$$

Beispiel 1.3 Betrachten wir die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} -y''(t) - y(t) &= t, \quad \text{für alle } t \in \,]0, 1[, \\ y(0) &= 0, \\ y(1) &= 0. \end{cases} \tag{7}$$

Als Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $-y''(t) - y(t) = 0$ können wir verwenden

$$y_1(t) = \cos(t) \quad \text{und} \quad y_2(t) = \sin(t).$$

Durch $y_{\text{part}}(t) = -t$ ist eine partikuläre Lösung gegeben. Das lineare Gleichungssystem hat dann die Form

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - y_{\text{part}}(0) \\ 0 - y_{\text{part}}(1) \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(1) & \sin(1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{\sin(1)}$ als Lösung. Die Lösung des Randwertproblems lautet daher

$$y(t) = \frac{1}{\sin(1)}\,\sin(t) - t.$$

Beispiel 1.4 Wir verändern nun obige Randwertaufgabe, indem wir andere Randoperatoren vorgeben:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y''(t) - y(t) & = & t, \quad \text{für alle } t \in \,]0,1[, \\ y'(0) & = & 1, \\ y(1) & = & 0. \end{array}\right. \tag{8}$$

Wir können also das Fundamentalsystem und die partikuläre Lösung wiederverwerten. Das lineare Gleichungssystem hat nun die Form

$$\begin{pmatrix} y_1'(0) & y_2'(0) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - y_{\text{part}}'(0) \\ 0 - y_{\text{part}}(1) \end{pmatrix},$$

und Einsetzen der gewählten Funktionen ergibt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(1) & \sin(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten $c_1 = \frac{1-2\,\sin(1)}{\cos(1)}$, $c_2 = 2$ als Lösung dieses Systems und als Lösung des Randwertproblems:

$$y(t) = \frac{1 - 2\,\sin(1)}{\cos(1)}\cos(t) + 2\,\sin(t) - t.$$

1.2 Numerische Lösung durch finite Differenzen

In der Praxis sind Fundamentalsysteme und partikuläre Lösungen oft nicht so einfach bestimmbar und die Lösung der Randwertaufgabe in der Regel nicht durch einen geschlossenen Ausdruck darstellbar.

Im Prinzip kann man numerische Methoden für das Lösen von Anfangswertaufgaben verwenden, indem man die zweite erforderliche Anfangsbedingungen zunächst schätzt und dann die zugehörige Anfangswertaufgaben numerisch löst. In der Regel wird die erhaltene Lösung keine Lösung der Randwertaufgabe sein, weil die Randbedingung am Rand $t = b$ nicht erfüllt ist. Daher wird man den ersten Schätzer für die zweite Anfangsbedingung sukzessive verbessern müssen, indem man die Anfangswertaufgabe immer wieder neu löst und den Fehler in der zweiten Randbedingung irgendwie zur Korrektur des Schätzers verwendet. Dies erfordert aber das Lösen von relativ vielen Anfangswertaufgaben. Solche Methoden subsummiert man unter dem Begriff *shooting methods*.

Eine in dieser Hinsicht sparsamere Methode erhält man durch folgende *Diskretisierung*:

1. Man zerlege das Interval $[a, b]$ in n Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$ mit Teilungspunkten $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, $t_k = a + k\,h$.

2. Statt Funktionen $y \in C^2([a, b])$ betrachte man nun Funktionen $y \in C^0([a, b])$, die auf jedem der Intervalle $[t_{k-1}, t_k]$, $k \in \{ 1, \dots, n \}$ affin-linear sind. Solche Funktionen nennt man auch *Polygonzüge*. So eine Funktion wird eindeutig beschrieben durch den Vektor $Y := (y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_n))^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

3. Man betrachte das Randwertproblem (8) nur noch an den Teilungspunkten für die inneren Teilungspunkte $t_1, \dots, t_{n-1}$; dabei führe man folgende Ersetzungen durch:
   - Die Ableitung $y'(t_k)$ an den Teilungspunkten ersetze man durch (linksssseitige) Differenzenquotienten:
   $$y'(t_k) \rightsquigarrow \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \frac{Y_k - Y_{k-1}}{h}.$$
   - Die zweiten Ableitung $y''(t_k)$ an den Teilungspunkten $t_1, \dots, t_{k-1}$ ersetze man durch Differenzenquotienten zweiter Ordnung:
   $$y''(t_k) \rightsquigarrow \frac{1}{\frac{t_{k+1}+t_k}{2} - \frac{t_k+t_{k-1}}{2}} \left(\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{t_{k+1} - t_k} - \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right) = \frac{Y_{k+1} - 2\,Y_k + Y_{k-1}}{h^2}.$$

Für $k = 1, \dots, n-1$ erhält man statt

$$a_0(t_k)\,y''(t_k) + a_1(t_k)\,y'(t_i) + a_2(t_k)\,y(t_k) = r(t_k)$$

die Gleichung

$$a_0(t_k)\,\frac{Y_{k+1} - 2\,Y_k + Y_{k-1}}{h^2} + a_1(t_k)\,\frac{Y_k - Y_{k-1}}{h} + a_2(t_k)\,Y_k = r(t_k)$$

Für die Randbedingungen kommen dann noch die Gleichungen

$$R_1[y] = \alpha_1 Y_0 + \beta_1 \frac{Y_1 - Y_0}{h} = r_1 \quad \text{und} \quad R_2[y] = \alpha_2 Y_n + \beta_2 \frac{Y_n - Y_{n-1}}{h} = r_2$$

hinzu. Mit $R = (r_1, r(t_1), \ldots, r(t_{n-1}), r_2)$ führt dies zu einem linearen Gleichungssystem $A\,Y = R$ mit $n+1$ Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten $Y = (Y_0, \ldots, Y_n)^\mathsf{T}$. Fügt man die Randbedingungen als erste und letzte Gleichung ein, so setzt sich die Systemmatrix $A = \underbrace{A_0 + A_1 + A_2}$ aus folgenden Matrizen zusammen:

ist A regulär, dann $AY = R$ ist zu lösen mit $Y = [Y_0, Y_1, \ldots, Y_n]^t$

$A = (a_{ij})_{i,j}$

$$A_0 := h^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0(t_1) & -2\,a_0(t_1) & a_0(t_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0(t_2) & -2\,a_0(t_2) & a_0(t_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0(t_{n-1}) & -2\,a_0(t_{n-1}) & a_0(t_{n-1}) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A regulär, falls A strikt diagonaldominant, d.h. falls $|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ $k = 0, \ldots, n$

$$A_1 := h^{-1} \begin{pmatrix} -\beta_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1(t_1) & a_1(t_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_1(t_2) & a_1(t_2) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_1(t_{n-1}) & a_1(t_{n-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\beta_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$a_{kk} = \begin{cases} \alpha_1 - \frac{\beta_1}{h} & k = 0 \\ \alpha_2 - \frac{\beta_2}{h} & k = n \\ \frac{-2a_0(t_k)}{h^2} + \frac{a_1(t_k)}{h} + a_2(t_k) & \end{cases}$$

$$A_2 := h^{-0} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2(t_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2(t_2) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2(t_{n-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

$$a_{kj} = \begin{cases} \frac{\beta_1}{h} & k = 0,\ j = 1 \\ \frac{a_0(t_k)}{h^2} & j = k+1 \\ \frac{a_0(t_k)}{h^2} - \frac{a_1(t_k)}{h}, & j = k-1 \end{cases}$$

Haben α_i und β_i verschiedene Vorzeichen und ist h so klein genug, so ist dieses

~~Gibt es ein $\gamma \geq \gamma$, so dass $a_0(t) > 0$ für alle $t \in [a,b]$ gilt und ist $a_2(t) \geq 0$, so ist dieses~~ System immer eindeutig lösbar und man kann zeigen, dass die als numerische Lösungen erhaltenen Polygonzüge für $n \to \infty$ gegen die Lösung des Randwertproblems (8) konvergieren (in geeignetem Sinn).

Bemerkung 1.5 Auffallend an der Matrix A ist, dass die allermeisten ihrer Einträge gleich 0 sind. Da nur die drei Hauptdiagonalen mit von 0 verschiedenen Einträgen besetzt sind, hat die Matrix mindestens $(n+1)^3 - 3\,n + 4$ Nullen. Man spricht auch von einer dünn besetzten Matrix. Dies ist typisch für Matrizen die man aus Diskretisierungen von Differentialgleichungen erhält und es ist etwas, das man sich unbedingt beim numerischen Lösen eines solchen Systems zunutze machen sollte.

Bemerkung 1.6 Das Lösen von Randwertaufgaben durch Diskretisierung hat auch den Vorteil, dass wir uns nicht nur auf lineare Randwertaufgaben zu beschränken brauchen. Im Beispiel des gepannten Kabels hatten wir kleine Auslenkungen angenommen, um die nichtlineare Kabelgleichung (3) zu linearisieren. Denkt man aber z. B. an eine Hängebrücke, so wird diese Annahme nicht immer zulässig sein. Trotzdem wird man das Problem (in einer geeigneten Formulierung) durch finite Differenzen diskretisieren können, was dann zu endlich vielen nichtlinearen Gleichungen führt. Letztere könnte man dann z. B. mit dem Newtonverfahren angehen...

2 Eigenwertaufgaben für Differentialoperatoren zweiter Ordnung

Eine besondere Klasse von Differentialoperatoren zweiter Ordnung

$$D\colon C^2([a,b]) \to C^0([a,b]), \quad y \mapsto D[y] := a_0\,y'' + a_1\,y' + a_2\,y,$$

sind die sogenannten *Sturm-Liouville-Operatoren* der Form

$$L\colon C^2([a,b]) \to C^0([a,b]), \quad y \mapsto L[y] := -(p\,y')' + q\,y,$$

wobei $p \in C^1([a,b])$ eine überall positive Funktion und $q \in C^0([a,b])$ eine stetige Funktion seien.

Unter der *homogenes Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe* versteht man die folgende Randwertaufgabe zweiter Ordnung:
Finde $y \in C^2([a,b])$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\left\{\begin{array}{rcl} L[y](t) - \lambda\,y(t) &=& 0, \quad \text{für alle } t \in \,]a,b[, \\ y(a) &=& 0, \\ y(b) &=& 0. \end{array}\right. \tag{9}$$

(Allgemeinere Randbedingungen sind auch möglich, siehe Bärwolff Abschnitt 6.13.1 und Abschnitt 6.13.2.) Ist (y,λ) ein Lösungspaar mit $y \neq 0$, so nennt man y *Eigenvektor* oder *Eigenfunktion* zum *Eigenwert* λ des Operators L.

Sturm-Liouville-Operatoren haben die Besonderheit in folgendem Sinne *selbstadjungiert* zu sein: Benutzt man auf dem Vektorraum $X := \{\, y \in C^2([a,b]) \mid y(a) = y(b) = 0 \,\}$ die Paarung

$$\langle u, v\rangle := \int_a^b u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{für } u,\, v \in X,$$

so gilt

$$\langle L[u], v\rangle = \langle u, L[v]\rangle \qquad \text{für alle } u,\, v \in X.$$

Die rechnet man ganz einfach mit partieller Integration nach:

$$\begin{aligned}\langle L[u], v\rangle &= \int_a^b \Big(-(p(t)\,u'(t))'\,v(t) + q(t)\,u(t)\,v(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \Big(p(t)\,u'(t)\,v'(t) + q(t)\,u(t)\,v(t)\Big)\,\mathrm{d}t - p(b)\,u'(b)\,\cancel{y(b)} + p(a)\,u'(a)\,\cancel{y(a)} \\ &= \int_a^b \Big(-u(t)\,((p(t)\,v'(t))' + q(t)\,u(t)\,v(t)\Big)\,\mathrm{d}t + p(b)\,v'(b)\,\cancel{u(b)} - p(a)\,v'(a)\,\cancel{u(a)} = \langle u, L[v]\rangle.\end{aligned}$$

Die hat unmittelbar zur Folge:

Satz 2.1 *Eigenfunktionen zu unterschiedlichen Eigenwerten eines Sturm-Liouville-Operators L sind orthogonal zueinander:*
Sind λ und μ mit $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von L und sind y und z die zugehörigen Eigenfunktionen, so gilt

$$\langle y, z \rangle = 0.$$

Proof.

$$\langle y, z \rangle = \frac{\lambda \langle y, z \rangle - \mu \langle y, z \rangle}{\lambda - \mu} = \frac{\langle L[y], z \rangle - \langle y, L[z] \rangle}{\lambda - \mu} = 0. \qquad \square$$

Beispiel 2.2 Für $y \in C^2([0,1])$ betrachten wir die folgende Eigenwertaufgabe mit $p(t) = 1$ und $q(t) = 0$:

$$\begin{cases} -y''(t) - \lambda y(t) &= 0, \quad \text{für alle } t \in]a, b[, \\ y(0) &= 0, \\ y(1) &= 0. \end{cases}$$

Man beachte, dass für Eigenpaare (y, λ) von L gelten muss

$$\lambda \langle y, y \rangle = \langle L[y], y \rangle = \int_0^1 |y(t)|^2 \, \mathrm{d}t > 0,$$

also gilt $\lambda > 0$. Für festes $\lambda > 0$ lautet ein Fundamentalsystem für $-y''(t) - \lambda y(t) = 0$: $y_1(t) = \cos(\sqrt{\lambda}\, t)$, $y_2(t) = \sin(\sqrt{\lambda}\, t)$. Eine partikuläre Lösung ist durch $y_{\text{part}}(t) = 0$ gegeben. Elimination der ersten Randbedingung $y(0) = 0$ liefert

$$y(t) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, t).$$

Da y eine Eigenfunktion sein soll, muss $c_2 \neq 0$ sein. Folglich muss für den Eigenwert gelten:

$$0 = y(1) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}),$$

also hat man $\lambda \in \{ (\pi k)^2 \mid k \in \mathbb{N} \}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist also $y_k = \sin(\pi k\, t)$ Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda_k = (\pi k)^2$ und dies sind auch bereits alle Eigenfunktionen und Eigenwerte von L.