

Differentialgleichungen I
TUHH
VL 12, 17. Januar 2017

Autonome Systeme, Erhaltungsgrößen, Stabilität

Michael Hinze

Stabilität autonomer Systeme

$$\dot{x} = F(x) \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

in Gleichgewichtspunkten \bar{x} mit $F(\bar{x}) = 0$. Wir entwickeln

$$F(x) = F(\bar{x}) + F'(\bar{x})(x - \bar{x}) + R(x, \bar{x})$$

mit $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$, falls F diffbar.

Setze $A := F'(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und beachte $F(\bar{x}) = 0$.

Damit ist (1) "in der Nähe" von \bar{x} von der Form

$$(2) \quad \dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (x - \bar{x} \rightarrow x)$$

Hier $\bar{x} = 0$ Gleichgewichtspunkt, weil $A\bar{x} = 0$ gilt für $\bar{x} = 0$.

Frage: Wie verhält sich die Lösung x von (2) relativ zu $\bar{x} = 0$, falls wir bei $x_0 \in B_\varepsilon(\bar{x})$ starten?

Sin $n=2$ | d.h. $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$, a_{ij} unabhängig von t .
 Damit Struktur der Lösung bekannt, weil das Fundamentalsystem
 von $\dot{x} = Ax$ bekannt ist.

Fall 1: $\exists \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ EW von A mit EVen v_1, v_2 .

Dann gilt $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ mit c_1, c_2 durch
 x_0 eindeutig bestimmt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \bar{x}| = ?$$

$$\underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \bar{x}|}_{\bar{x} = 0} = \lim_{t \rightarrow \infty} |c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2| \leq c e^{\max\{\lambda_1, \lambda_2\} t}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \bar{x}| = \begin{cases} 0, & \lambda_1, \lambda_2 < 0 & \text{stabil} \\ \infty, & \lambda_1 \text{ und oder } \lambda_2 > 0 & \text{instabil} \\ \text{const}, & \lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0; \lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0 & \text{stabil} \end{cases}$$

Fall 2 | λ doppelter EW und $\dim \text{Eig}(\lambda) = 2$ (algebraisch = geometrischer Vielfachheit)

Damit $x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2$, v_1, v_2 EVen zu λ

$$\begin{aligned} \text{also } \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \bar{x}| &= \lim_{t \rightarrow \infty} |c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2| \\ &= c \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = c \begin{cases} 0, & \lambda < 0 \\ \text{const}, & \lambda = 0 \\ \infty, & \lambda > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Fall 3 | λ doppelter EW mit $\dim \text{Eig}(\lambda) = 1$, v_1 EV

Sei v_2 Hauptvektor. Dann $x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 t e^{\lambda t} v_2$

Damit gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \bar{x}| = \lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 + dt) e^{\lambda t} = \begin{cases} 0, & \lambda < 0 \\ \infty, & \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Fall 4 | $\lambda = a + ib$ komplex $\rightarrow \bar{\lambda} = a - ib$ EW und

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\bar{\lambda} t} v_2$$

$$\text{mit } \begin{array}{l} |e^{\lambda t}| = |e^{(a+ib)t}| = e^{at} \underbrace{|e^{ibt}|}_{=1} \\ \parallel \\ |e^{\bar{\lambda} t}| \end{array} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & a = \text{Re} \lambda < 0 \\ \infty, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

$$\text{Damit } \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \bar{x}| = \begin{cases} 0, & \text{Re} \lambda < 0 \\ \infty, & \text{Re} \lambda > 0 \\ \text{const}, & \text{Re} \lambda = 0 \end{cases}$$

Wir sagen, dass das autonome System (1)

stabil ist bei \bar{x} , falls alle EWe von $F'(\bar{x})$ negativen Realteil haben,

instabil ist bei \bar{x} , falls mindestens ein Eigenwert positiven Realteil hat

Beacht: Aussagen für $\text{Re} \lambda = 0$ sind nicht möglich, weil dies oben

ausgeführte lineare Stabilitätsanalyse auf dem linearisierten System $\dot{x} = F'(\bar{x})(x - \bar{x})$ basiert und damit den Fehler R auf Bow Acht lässt.

Bsp: Raiber-Bank Modell

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ cx_1x_2 - dx_2 \end{bmatrix} = F(x), \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} d/c \\ a/b \end{bmatrix} \text{ Gleichgewicht,}$$

wobei $F(\bar{x}) = 0$.

$$F'(x) = \begin{bmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ cx_2 & cx_1 - d \end{bmatrix}, \quad F'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ca}{b} & 0 \end{bmatrix},$$

d.h. EWe erfüllen $\lambda^2 + ad = 0$; $\lambda_1 = i\sqrt{ad}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{ad}$,

also $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$. Damit \bar{x} stabiles Gleichgewicht, aber im Sinne der linearen Stabilitätsanalyse, d.h. nicht

nicht asymptotisch stabil

dass $\dot{x} = F(x)$ bei \bar{x} stabil ist!

Ausblick auf Strömungen \rightarrow Navier-Stokes Gleichungen

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ Geschwindigkeit eines Strömungspartikels zur Zeit t am Ort x , $\rho(t, x)$ Dichte im Ort x zur Zeit t .

$$\underbrace{\rho(t, x)}_{\text{Re}} \dot{v}(t, x) - \Delta \rho(t, x) + (v(t, x) \cdot \nabla) v(t, x) + \nabla \rho(t, x) = F(t, x) = 0$$

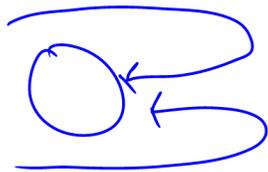
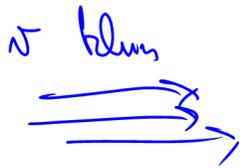
Reynoldszahl > 0

mit F äusserer Kraft.

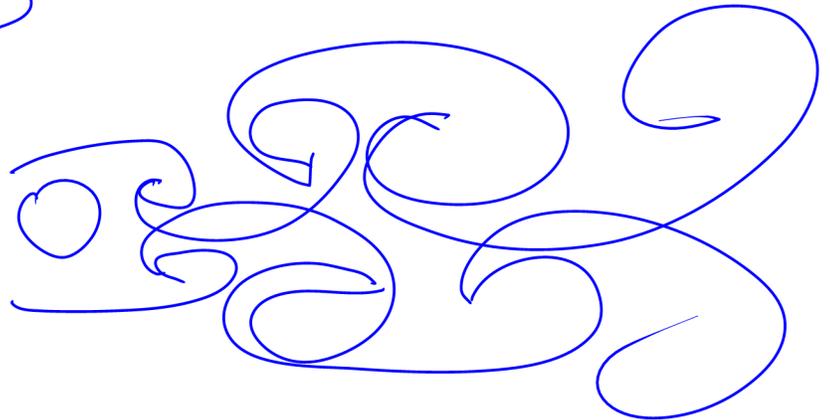
Stationäre Gleichung : $-\frac{1}{\rho} \Delta_x \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla_x) \vec{v} + \nabla \pi = 0$
 $-\operatorname{div}_x \vec{v} = 0$

Frage: Gibt es (\vec{v}, π) ? falls ja, ist (\vec{v}, π) stabil?

Karman'scher Wirbelstrahler



stabil



instabil