Differentialgleichungen I
TUHH
VL 12, 17. Januar 2017

Autonome Systeme, Erhaltungsgrößen, Stabilität

Michael Hinze

Stabilität autonomer Systeme

$$\dot{x} = F(x) \qquad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

in Gleichgewichtspunkten $\bar{x}$ mit $F(\bar{x}) = 0$. Wir entwickeln

$$F(x) = F(\bar{x}) + F'(\bar{x})(x-\bar{x}) + R(x,\bar{x})$$

mit $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \frac{R(x,\bar{x})}{|x-\bar{x}|} = 0$, falls F diffbar.

Setze $A := F'(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und beachte $F(\bar{x}) = 0$.

Damit ist (1) "in der Nähe" von $\bar{x}$ von der Form

(2) $$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0 \qquad (x - \bar{x} \rightsquigarrow x)$$

Hier $\bar{x} = 0$ Gleichgewichtspunkt, weil $A\bar{x} = 0$ gilt für $\bar{x} = 0$.

Frage: Wie verhält sich die Lösung x von (2) relativ zu $\bar{x} = 0$, falls wir bei $x_0 \in B_\varepsilon(\bar{x})$ starten?

Sei $n=2$ | d.h. $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{2}$, a_{ij} unabhängig von t.

Damit Struktur der Lösung bekannt, weil das Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$ bekannt ist.

Fall 1: $\mathbb{R} \ni \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ EWe von A mit EVen v_1, v_2.

Dann gilt $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ mit c_1, c_2 durch x_0 eindeutig bestimmt

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty} |x(t) - \bar{x}|}_{} = ?$$

$$\overset{\bar{x}=0}{=} \lim_{t\to\infty} |x(t)| = \lim_{t\to\infty} \underbrace{| c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 |}_{\leq c\, e^{\max\{\lambda_1,\lambda_2\} t}}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} |x(t) - \bar{x}| = \begin{cases} 0, & \lambda_1, \lambda_2 < 0 \quad \text{stabil} \\ \infty, & \lambda_1 \text{ und/oder } \lambda_2 > 0 \quad \text{instabil} \\ \text{const}, & \lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0;\ \lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0 \quad \text{stabil} \end{cases}$$

Fall 2 | λ doppelter EW und $\dim \operatorname{Eig}(\lambda) = 2$ (algebraische = geometrischer Vielfachheit)

Damit $x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2$, v_1, v_2 EVen zu λ

also
$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - \bar{x}| = \lim_{t\to\infty} | c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t} v_2 |$$
$$= c \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = c \begin{cases} 0, & \lambda < 0 \\ \text{const}, & \lambda = 0 \\ \infty, & \lambda > 0 \end{cases}$$

<u>Fall 3</u> | λ doppelter EW mit $\dim \mathrm{Eig}(\lambda) = 1$, v_1 EV

Sei v_2 Hauptvektor. Dann $x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 t e^{\lambda t} v_2$

Damit gilt

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - \bar{x}| = \lim_{t\to\infty} (c_1 + dt) e^{\lambda t} = \begin{cases} 0, & \lambda < 0 \\ \infty, & \lambda \geq 0 \end{cases}$$

<u>Fall 4</u> | $\lambda = a + ib$ komplex $\Longrightarrow$ $\bar{\lambda} = a - ib$ EW und

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\bar{\lambda} t} v_2$$

mit

$$\underset{\displaystyle |e^{\bar{\lambda} t}|}{\overset{\|}{|e^{\lambda t}|}} = |e^{(a+ib)t}| = e^{at} \underbrace{|e^{ibt}|}_{=1} \xrightarrow{t\to\infty} \begin{cases} 0, & a = \mathrm{Re}\,\lambda < 0 \\ \infty, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

Damit

$$\lim |x(t) - \bar{x}| = \begin{cases} 0, & \mathrm{Re}\,\lambda < 0 \\ \infty, & \mathrm{Re}\,\lambda > 0 \\ \mathrm{const}, & \mathrm{Re}\,\lambda = 0 \end{cases}$$

Wir sagen, dass das autonome System (1)

stabil ist bei $\bar{x}$, falls alle EWe von $F'(\bar{x})$ negativen Realteil haben,

instabil ist bei $\bar{x}$, falls mindestens ein Eigenwert positiven Realteil hat

<u>Beachte</u>: Aussagen für $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ sind nicht möglich, weil die oben

ausgeführte lineare Stabilitätsanalyse auf dem linearisierten System $\dot{x} = F'(\bar{x})(x-\bar{x})$ basiert und damit den Fehler R außer Acht lässt.

Bsp: Räuber-Beute Modell

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x_1 - b x_1 x_2 \\ c x_1 x_2 - d x_2 \end{bmatrix} = F(x), \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} d/c \\ a/b \end{bmatrix} \text{ Gleichgewicht,}$$

weil $F(\bar{x}) = 0$.

$$F'(x) = \begin{bmatrix} a - b x_2 & -b x_1 \\ c x_2 & c x_1 - d \end{bmatrix}, \quad F'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ca}{b} & 0 \end{bmatrix},$$

d.h. EWe erfüllen $\lambda^2 + ad = 0$; $\lambda_1 = i\sqrt{ad}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{ad}$,

also $\mathrm{Re}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$. Damit $\bar{x}$ $\underbrace{\text{stabiles Gleichgewicht}}_{\text{im Sinne der linearen Stabilitätsanalyse, d.h. nicht, dass } \dot{x} = F(x) \text{ bei } \bar{x} \text{ stabil ist!}}$, aber nicht asymptotisch stabil

Ausblick auf Strömungen $\rightarrow$ Navier-Stokes Gleichungen

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ Geschwindigkeit eines Strömungspartikels zur Zeit t am Ort x, $p(t,x)$ Druck im Ort x zur Zeit t.

$$\dot{v}(t,x) - \frac{1}{Re} \Delta_x v(t,x) + (v(t,x) \cdot \nabla_x) v(t,x) + \nabla_x p(t,x) = F(t,x)$$
$$-\operatorname{div}_x v(t,x) = 0$$

\ Reynoldszahl > 0

mit $\bar{F}$ äussere Kraft.

Stationäre Gleichung : $-\frac{1}{Re}\Delta_x \bar{v} + (\bar{v}\cdot\nabla_x)\bar{v} + \nabla_x \bar{p} = 0$

$$-\operatorname{div}_x \bar{v} = 0$$

Frage : Gibt es $(\bar{v}, \bar{p})$? falls ja, ist $(\bar{v}, \bar{p})$ stabil ?

Karman'sche Wirbelstraße