Differentialgleichungen I
TUHH
VL 10, 20. Dezember 2016

Numerische Methoden, Stabilität

Michael Hinze

Konstruktion von Verfahren zur numerischen Lösung von

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

i.) Polygonzugverfahren $\leadsto$ VL 13.12.16

ii) Extrapolationsprinzip

Ziel: $F(0)$ berechnen. Das geht aber nicht, weil dies ∞-aufwändig wäre.

Bsp: $F(0) = y(t_k)$, mit Euler nicht exakt berechenbar

$F(h) := y_k^1 \approx y(t_k)$ mit Euler bei Schrittweite h

$F(\frac{h}{2}) := y_k^2 \approx y(t_k)$ ——— $\frac{h}{2}$

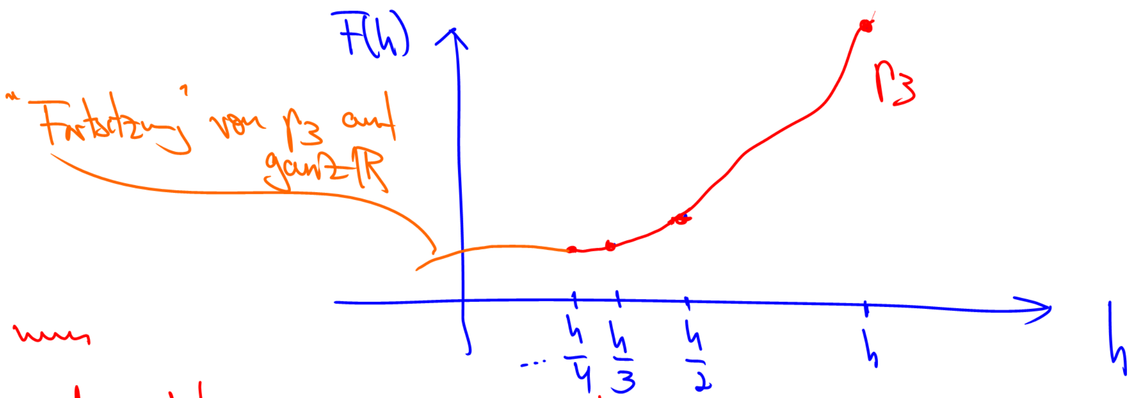
$\vdots$

$F(\frac{h}{n+1}) := y_k^{n+1} \approx y(t_k)$ ——— $\frac{h}{n+1}$

Interpoliere in $(h, F(h)), \dots, (\frac{h}{n+1}, F(\frac{h}{n+1})) \leadsto p_n(s) \in \mathcal{P}_n$ mit

$$p_n\left(\frac{h}{i}\right) = y_k^i$$

Wir wissen: $y_k^i \xrightarrow{i\to\infty} y(t_k)$ (VL 13.12.16)



Idee: Fasse nun

$p_n(0)$ als Näherung von $F(0)$ auf.

Dieses Prinzip heißt Extrapolation.

Anwenden auf numerische Integration von DGLen

$n=1$: Interpolation in $(h, \underbrace{F(h)}_{f_h})$ und $(\frac{h}{2}, \underbrace{F(\frac{h}{2})}_{f_{h/2}})$ liefert

$$p_1(s) = 2f_{h/2} - f_h + \frac{2}{h}(f_h - f_{h/2})s$$

Damit $p_1(0) = 2f_{h/2} - f_h$

Wir setzen

$$y_k^1 := f_h := y_k + h f(x_k, y_k) \qquad \text{Eulerschritt mit } h$$

$$y_k^2 := f_{h/2} := y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) + \frac{h}{2} f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right)$$

2 Eulerschritte mit $\frac{h}{2}$

$$p_1(0) = 2y_k^2 - y_k^1 = \underbrace{y_k + h f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right)}_{=: y_k^3}$$

neue Näherung für $y(t_{k+1})$

Es gilt (falls f glatt genug)

$$y(t_{k+1}) - (2y_k^2 - y_k^1) \sim h^2$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) + \frac{h}{2} f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right)$$

heißt verbessertes Euler Verfahren.

<u>Quadratur</u>

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0$$

$$\Longrightarrow \quad y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y(s))\, ds$$

d.h. $$y(t_1) = y_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))\, ds}_{\text{i.d.R. nicht exakt auswertbar!}}$$

Ausweg: Quadraturformel

i.) Mittelpunktregel: $$\int_a^b g(s)\, ds \approx (b-a)\, g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

angewendet auf unsere Situation:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))\, ds \approx (t_1 - t_0)\, f\Big(t_0 + \frac{h}{2}, \underbrace{y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)}_{\text{unbekannt!}}\Big)$$

<u>Aber</u>: $$y\left(t_0 + \frac{h}{2}\right) = \underbrace{y(t_0)}_{= y_0} + \frac{h}{2} \underbrace{y'(t_0)}_{f(t_0, y_0)} + O(h^2)$$

Insgesamt

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))\, ds \approx h\, f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)\right)$$

Schließlich

$$y(t_1) \approx y_0 + h\, f\left(t_0+\frac{h}{2},\, y_0+\frac{h}{2} f(t_0, y_0)\right)$$

Verfahren: $y_1 \approx y(t_1)$; $\quad y_1 = y_0 + h\, f\left(t_0+\frac{h}{2},\, y_0+\frac{h}{2} f(t_0,y_0)\right)$

Verbessertes Euler Polygonzug Verfahren.

y_0 gg.; $\quad y_{k+1} = y_k + h\, f\left(t_k+\frac{h}{2},\, y_k+\frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right)$ explizites Verfahren

Ein implizites Verfahren:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))\, ds \overset{\text{Trapezregel}}{\approx} \frac{1}{2}(t_1-t_0)\left(f(t_1, y(t_1)) + f(t_0, y(t_0))\right)$$

Verfahren

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} h \left[f(t_0+h, y_1) + f(t_0, y_0)\right]$$

implizit in y_1. Auflösen nach y_1 möglich, falls f geeignet, d.h. $G(s) := s - \left(y_0 + \frac{1}{2} h \left[f(t_0+h, s) - f(t_0, y_0)\right]\right)$ erfüllt die Voraussetzung des Satzes über die Umkehrabbildung $\rightarrow$ SgL

$G(s) = 0 \quad \longrightarrow$ Newton Verfahren

Potenzreihen-Methode zur näherungsweisen Lsg von $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$

A: $\quad y(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \ldots$ Potenzreihe $\rightarrow a_0 = ?, a_1 = ?, a_2 = ? \ldots$

Damit gilt: $\quad a_0 = y(t_0) = y_0$ ✓ $\qquad y''(t_0) = 2a_2$

$\qquad y'(t_0) = a_1 = f(t_0, y_0)$ ✓ $\qquad \| \; (y'(t))'\big|_{t=t_0} = f(t, y(t))'\big|_{t=t_0}$

$$f(t,y(t))'\Big|_{t=t_0} = \Big[f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t))\,y'(t)\Big]_{t=t_0} = f_t(t_0,y_0) + f_y(t_0,y_0)\,f(t_0,y_0)$$

$$\longrightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

Taylorreihen - Methode für $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$

TR: $y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}y''(t_0)(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}y^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n$

$+ R_n$ mit $R_n = o((t-t_0)^n)$

Nutze:
$$y(t_0) = y_0$$
$$y'(t_0) = f(t_0,y_0)$$
$$y''(t_0) = f_t(t_0,y_0) + f_y(t_0,y_0)\,f(t_0,y_0)$$
$$y'''(t_0) = \dots \quad \text{SgL}$$

und lasse R_n weg