Differentialgleichungen I
TUHH
VL 8, 6. Dezember 2016

Differentialgleichungen n-ter Ordnung, Systeme

Michael Hinze

Betrachte

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = g(t)$$

Ziel: Beschreibung der Lösungsmenge $z(t) = z_{inh}(t) + z_{hom}(t)$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Bestimme Nullstellen $P(\lambda) = 0$

i) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschieden. Dann
$e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ FS der homogenen Gleichung

ii) Ist λ k-fache Nullstelle von P, so sind die Funktionen
$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$ l. unabh. Lösungen der homogenen Gleichung

iii) $\lambda = \sigma + i\tau$ komplexe Nullstelle (dann ist auch $\bar{\lambda}$ Nullstelle)

Dann sind

$$e^{\sigma t} \sin \tau t \quad \text{und} \quad e^{\sigma t} \cos \tau t$$

reelle Fundamentallösungen

Es fehlt noch $z_{inh}(t)$, die partikuläre Lösung. Hängt ab von $g(t)$. Hier sind Ansätze für $z_{inh}(t)$ möglich, siehe Tabelle bei den Braunfolien oder im Buch von Bärwolff

Bsp: $\quad z'' - z = \underbrace{4e^t}_{g(t)}$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ ergibt $\lambda_{1/2} = \pm 1$ und das FS

$z_1(t) = e^t, \quad z_2(t) = e^{-t}$.

$z_{inh}(t) = a\, t\, e^t \qquad$ weil $(e^t)'' - e^t = 0$

Bestimmen aus DGL: $\quad z_{inh}''(t) - z_{inh}(t) = 2a\, e^t + at e^t - at e^t$

$$\stackrel{!}{=} 4e^t \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{a=2}}$$

$\mathbb{L} = \{ z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 2te^t \}$ $\qquad c_1, c_2$ aus AWen.

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung von Lösungen von DGLen n-ter Ordnung liefert die s.g. Laplace Transformation

Laplace Transformation für $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

$$\mathcal{L}[f(t)] := F(z) := \underbrace{\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt}_{\in \mathbb{C}, \text{ falls existent}}, \quad z \in \mathbb{C}$$

denn $e^{-zt} = e^{-\operatorname{Re} z\, t}\, e^{-i \operatorname{Im} z\, t} = e^{-\operatorname{Re} z\, t} (\cos \operatorname{Im} z\, t - i \sin \operatorname{Im} z\, t)$,

also $F(z) = \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} z\, t} \cos \operatorname{Im} z\, t\, f(t)\, dt - i \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} z\, t} \sin \operatorname{Im} z\, t\, f(t)\, dt$

1.) Wann existiert $F(z)$ (das ist ja ein uneigentliches Integral!)

Es gilt $|e^{-zt} f(t)| \le e^{-\operatorname{Re} z\, t}\, \underbrace{|e^{i \operatorname{Im} z\, t}|}_{=1} |f(t)|$

Sei f von exponentieller Ordnung, d.h.

$$|f(t)| \le M e^{\gamma t} \quad \text{mit } 0 \le M < \infty \text{ und } \gamma > 0,$$

dann gilt

$$|e^{-zt} f(t)| \le M e^{(\gamma - \operatorname{Re} z)t}.$$

Damit folgt

$$|F(z)| \le \int_0^\infty |e^{-zt} f(t)|\, dt \le M \int_0^\infty e^{(\gamma - \operatorname{Re} z)t}\, dt < \infty, \text{ falls } \operatorname{Re} z > \gamma,$$

also $F(z)$ sinnvoll für $\operatorname{Re} z > \gamma$!

Bsp 1.) $\Theta(t) := \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t \in (-\infty, 0) \end{cases}$ Heavyside-Funktion

$\lim_{T\to\infty}(e^{-zT} - e^{-z0}) = -1$

Es gilt

$$\mathcal{L}[\Theta(t)] = \int_0^\infty \Theta(t)\, e^{-zt}\, dt = \int_0^\infty e^{-zt}\, dt = -\frac{1}{z}\, \overbrace{e^{-zt}\Big|_0^\infty} = \frac{1}{z}$$

i) $h_a(t) := \Theta(t-a)$. Dann

$$\mathcal{L}[h_a(t)] = \frac{e^{-az}}{z} \qquad \text{SgL}$$

ii) $$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-zt}\, e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-z)t}\, dt = \frac{1}{a-z}\, e^{(a-z)t}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{z-a}.$$

Eindeutigkeitssatz für Laplace Transformationen besagt, dass

$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g] \Leftrightarrow f = g$. Nutze dies zur Lösung von

Differentialgleichungen; z Bsp $y' = y$ und $y(0) = 1$,

also $y(t) = e^t$

$$y'(t) = y(t)$$

also $$\mathcal{L}[y'(t)] = \mathcal{L}[y(t)] \implies \mathcal{L}[y(t)] = ?$$

$$\|$$

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, y'(t)\, dt \overset{\text{p. Integr.}}{=} e^{-zt}\, y(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-z)\, e^{-zt}\, y(t)\, dt$$

$$= -y(0) + z\int_0^\infty e^{-zt}\, y(t)\, dt = y(0) + z\,\mathcal{L}[y(t)]$$

Regel: $\mathcal{L}[y'(t)] = -y(0) + z\,\mathcal{L}[y(t)]$.

Also: $-y(0) + z\,\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[y(t)] \implies \mathcal{L}[y(t)] = \dfrac{-y(0)}{1-z} = \dfrac{y(0)}{z-1}$

Beachte: $\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{z-a} \implies y(t) = y(0)\,e^{t}$

Abschließend ein weiteres Bsp

$$y'' + 9y = \cos 2t \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

Betrachte

$$\mathcal{L}[y''(t) + 9y(t)] = \mathcal{L}[y''(t)] + 9\,\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[\cos 2t] \overset{\text{nachrechnen!}}{=} \frac{z}{z^2+4}$$

$$\mathcal{L}[y''(t)] = z^2\,\mathcal{L}[y(t)] - z\underbrace{y(0)}_{=1} - \underbrace{y'(0)}_{=1}$$

Damit

$$(z^2+9)\,\mathcal{L}[y(t)] - z - 1 = \frac{z}{z^2+4}$$

also

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{4}{5}\,\frac{z}{z^2+9} + \frac{1}{z^2+9} + \frac{z}{5(z^2+4)}$$

$$= \frac{4}{5}\,\mathcal{L}[\cos 3t] + \frac{1}{3}\,\mathcal{L}[\sin 3t] + \frac{1}{5}\,\mathcal{L}[\cos 2t]$$

Also

$$y(t) = \frac{4}{5}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\cos 2t.$$