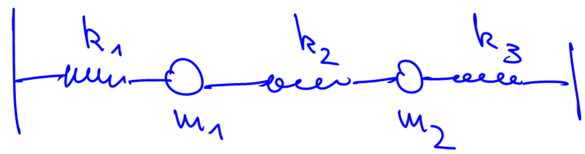
Differentialgleichungen I
TUHH
VL 6, 22. November 2016

Differentialgleichungen ~~erster~~ höherer Ordnung, Systeme

Michael Hinze

Einführendes Beispiel



m_1, m_2 Massen, k_1, k_2, k_3 Federkonstanten

$x_1(t)$ Auslenkung von m_1, $x_2(t)$ Auslenkung von m_2

Kräfte bilanzieren

$$m_1 \ddot{x}_1(t) = -k_1 x_1(t) + k_2 (x_2(t) - x_1(t))$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) = k_2 (x_1(t) - x_2(t)) - k_3 x_2(t)$$

in Matrix Form:

$$\ddot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_3+k_2}{m_2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} \qquad (*)$$

Erzeuge DGL-System erster Ordnung; setze

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \dot{x}_1, \quad y_3 = x_2, \quad y_4 = \dot{x}_2, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Dann ist (*) äquivalent zu

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 \end{bmatrix} y =: Ay$$

Setze etwa $m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = k_3 = 2$

EWe von A $\quad \lambda_{1/2} = \pm i, \quad \lambda_{3/4} = \pm 2i$

EVen: $v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$ $v^2 = \overline{v^1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$, $v^3 = \begin{bmatrix} 2i \\ -4 \\ -i \\ 2 \end{bmatrix}$ $v^4 = \overline{v^3} = \begin{bmatrix} -2i \\ -4 \\ i \\ 2 \end{bmatrix}$

FS: $\quad e^{\lambda_1 t} v^1,\ e^{\lambda_2 t} v^2,\ e^{\lambda_3 t} v^3,\ e^{\lambda_4 t} v^4$

Reelle Lösungen erhalten wir aus der Formel

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} \bar{z}$$
$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} z - \frac{1}{2i} \bar{z}$$

Differentialgleichungen n-ter Ordnung (lineare DGLen n-ter Ordnung)

$$z^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, z^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)\, z^{(n-2)}(t) + \dots + a_1(t)\, z'(t) + a_0(t)\, z(t)$$

(DGL n) $$= g(t)$$

heißt lineare DGL n-ter Ordnung mit Koeffizienten $a_i(t)$ $(i = 0, \dots, n-1)$

Frage: Wie können wir die Lösungsmenge darstellen

Idee: schreibe (DGL n) um als System erster Ordnung

Dazu setze

$$y_1(t) := z(t),\quad y_2(t) := z'(t),\quad y_3(t) := z''(t), \dots, \quad y_n(t) := z^{(n-1)}(t)$$

und definiere

$y' = A(t)y \overset{!}{\Longrightarrow} z^{(n)}(t) + \dots + a_0(t)z(t) = g(t)$

$$A(t) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

$$y' = Ay + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix}}_{G(t)}$$

Dann $A(t)y(t) = A(t)\begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$

$\frac{\text{letzte}}{\text{Zeile}}$ $-a_0(t)z(t) - a_1(t)z'(t) - \dots - a_{n-1}(t)z^{(n-1)}(t)$

$= z^{(n)}(t) - g(t)$, d.h. z erfüllt lineare DGL n-ter Ordnung mit Koeffizienten $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$.

Wir können die Lösungsmenge von $y' = Ay + G$ beschreiben. Leite daraus eine Beschreibung der Lösungsmenge der linearen DGL (DGL$_n$) her.

Def.: $z_1, z_2, \dots, z_n$ seien Lösungen von $\qquad z^{(0)} = z$

$$z^{(n)} + a_{n-1}(t)z^{(n-1)} + \dots + a_0(t)z^{(0)} = 0$$

Falls $z_1, \dots, z_n$ linear unabhängig sind, d.h.

$$\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0,$$

so heißt $z_1, \dots, z_n$ Fundamentalsystem von (DGL$_n$)

Folgerung: $z_1, z_2, \dots, z_n$ FS von (DGLn), dann

$$y_i(t) := \begin{bmatrix} z_i(t) \\ z_i'(t) \\ \vdots \\ z_i^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n \quad \text{FS von } y' = A(t)y$$

Nachweis: betrachte mit $F(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]$ ($n \times n$ Matrix)

$W(t) = \det F(t)$. Dann $W(t) \neq 0 \ \forall t$, weil

$$F(t)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \overset{\text{erste}}{\underset{\text{Zeile}}{=}} \alpha_1 z_1(t) + \dots + \alpha_n z_n(t) = 0 \ \forall t \xrightarrow{\text{n. Vor.}} \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0,$$

d.h. $F(t)$ regulär $\forall t$, also $W(t) \neq 0 \ \forall t$, d.h. $y_1, \dots, y_n$ FS!

Darstellung der Lösungsmenge

$$y' = A(t)y + G(t) \qquad \mathbb{L} = \underbrace{y_{hom}(t)}_{\text{homogene}} + \underbrace{y_{inh}(t)}_{\text{partikuläre Lösung}},$$

wobei $y_{hom}(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$.

Dabei sind $c_1, \dots, c_n$ etwa durch Anfangswerte $y(0) = y_0$ festgelegt.

Es gilt (siehe VL 4)

$$y_{inh}(t) = F(t) \int F(t)^{-1} G(t)\, dt$$

Damit ist die Lösungsmenge von (DGLn) gegeben durch

$$z(t) = z_{hom}(t) + z_{inh}(t),$$

wobei $\quad z_{hom}(t) = c_1 z_1(t) + \dots + c_n z_n(t) \quad$ und

$z_{inh}(t) =$ erste Komponente von $y_{inh}(t)$.

Bsp: $n=2$; $\quad z''(t) + a_1(t) z'(t) + a_0(t) z(t) = g(t)$

Form System: $\quad y' = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ z' \end{bmatrix}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}}_{A(t)} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$

Sei z_1, z_2 FS zu (DGL 2). Dann

$$F(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{bmatrix} \qquad \text{FS zu } y' = Ay + G$$

Es gilt $\quad F(t)^{-1} = \dfrac{1}{W(t)} \begin{bmatrix} z_2'(t) & -z_2(t) \\ -z_1'(t) & z_1(t) \end{bmatrix}$, also

$$W(t) = \det F(t) = z_1(t) z_2'(t) - z_1'(t) z_2(t)$$

$$F(t)^{-1} G(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{bmatrix} -z_2(t) g(t) \\ z_1(t) g(t) \end{bmatrix}. \quad \text{Ergo}$$

$$y_{inh}(t) = \begin{bmatrix} -z_1(t) \int \frac{z_2(t) g(t)}{W(t)} dt + z_2(t) \int \frac{z_1(t) g(t)}{W(t)} dt \\ -z_1'(t) \int \frac{z_2(t) g(t)}{W(t)} dt + z_2'(t) \int \frac{z_1(t) g(t)}{W(t)} dt \end{bmatrix}$$

bzw $\quad z_{inh}(t) = -z_1(t) \displaystyle\int \frac{z_2(t) g(t)}{W(t)} dt + z_2(t) \int \frac{z_1(t) g(t)}{W(t)} dt$

$\boxtimes$.