Differentialgleichungen I
TUHH
VL 5, 15. November 2016

Differentialgleichungen erster Ordnung, Systeme

Michael Hinze

Zur Bestimmung eines Fundamentalsystems von $y' = Ay$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Hilfe der Jordan'schen Normalform von A. A habe EWe $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ mit $m \le n$. Dann gibt es Basis $v_{11} \dots v_{1r_1}, v_{21} \dots v_{2r_2} \dots \dots v_{m1} \dots v_{mr_m}$ von $\mathbb{R}^n$, s.d. mit $S := [v_{11} \dots v_{mr_m}] \in \underbrace{GL(n;\mathbb{C})}_{\text{Gruppe der invertierbaren } n\times n \text{ Matrizen}}$

gilt

$$\begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_m \end{bmatrix} = J = S^{-1}AS, \quad J_i = \begin{bmatrix} J_i^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_i^l \end{bmatrix}, \quad J_i^k := \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ik}\times r_{ik}}$$

$k = 1, \dots, l$, $\sum_{k=1}^{l} r_{ik} = r_i$

einen Jordanblock zum EW λ_i bezeichnet. Dabei erfüllen die v_{ij} folgendes (wir nehmen OE hier $l=1$ an)

v_{i1} EV von A zum EW λ, d.h. $(A - \lambda_i I)v_{i1} = 0$

v_{i2} erster HV von A —"—, d.h. $\underbrace{(A - \lambda I)v_{i2} = v_{i1}}$

$\Rightarrow (A - \lambda_i I)^2 v_{i2} = 0$

$\vdots$

v_{ir_i} $(r_i - 1)$ter HV von A —"—, d.h. $(A - \lambda I)v_{ir_i} = v_{i\,r_i-1}$

$\Rightarrow (A - \lambda I)^{r_i} v_{ir_i} = 0$

Insgesamt erfüllen $v_{i1}, \dots, v_{ir_i}$ die Gleichung $(A - \lambda I)^{r_i} v_{ij} = 0$

sind also Hauptvektoren von A zu $\qquad j = 1, \dots, r_i$,

Sind v_{ij} $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, r_i$ zusammen mit den EWen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ bekannt, so können wir über die Jordan'sche Normalform ein FS von $y' = Ay$ konstruieren. Das geht so (für einen Jordanblock)

Setze $y = Sz$ mit z aus $z' = Jz$. Dann erfüllt $\tilde{y}$

$$y' = Sz' = SJz \overset{J = S^{-1}AS}{=} A\underbrace{Sz}_{y} = Ay, \quad \text{d.h. } y \text{ löst } y' = Ay$$

Betrachte also

im $\mathbb{R}^{r_i \times r_i}$ $\quad z' = J_i z \quad$ und konstruiere FS für diese Gleichung.

$$\begin{bmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^{r_i} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^{r_i} \end{bmatrix}. \qquad \text{Sei } e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_i}.$$

Dann erfüllt $z_{i1}(t) := e^{\lambda_i t} e_1 \quad : \quad z_{i1}' = J_i z_{i1}$

$$z_{i1}' = \lambda_i e^{\lambda_i t} e_1 \quad ; \quad J_i z_{i1} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} e_1 = \lambda_i e^{\lambda_i t} e_1$$

$$z_{i2}(t) = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Dann gilt } z_{i2}'(t) = J_i z_{i2}$$

$\vdots$

$$z_{ir_i}(t) = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} t^{r_i - 1}/(r_i - 1)! \\ t^{r_i - 2}/(r_i - 2)! \\ \vdots \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{erfüllt} \quad z_{ir_i}'(t) = J_i z_{ir_i}$$

Ferner sind $z_{i1}, \dots, z_{ir_i}$ linear unabhängig!

Setze $y_{ij} = S_i z_{ij}$ $j = 1, \dots, r_i$, wobei $S_i = [v_{i1}, \dots, v_{ir_i}]$

Damit ergibt sich

$$y_{i1} = S_i z_{i1} = e^{\lambda_i t} [v_{i1} \dots v_{ir_i}] e_1 = e^{\lambda_i t} v_{i1}$$

$$y_{i2} = S_i z_{i2} = e^{\lambda_i t} [v_{i1} \dots v_{ir_i}] \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e^{\lambda_i t} [t v_{i1} + v_{i2}]$$

$$\vdots$$

$$y_{ir_i} = S_i z_{ir_i} = e^{\lambda_i t} [v_{i1} \dots v_{ir_i}] \begin{bmatrix} t^{(r_i-1)}/(r_i-1)! \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = e^{\lambda_i t} \Big[\frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} v_{i1} + \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} v_{i2} + \dots + t\, v_{i r_{i-1}} + v_{i,r_i} \Big]$$

und $y_{i1}, \dots, y_{ir_i}$ linear unabhängig, weil S_i Vollrang r_i hat.

Bsp: $y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}}_{A} y$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^3$, d.h. EW λ mit alg. Vielfachheit $3 > \underbrace{\dim Eig(\lambda) = 1}$

weil $rg(A - 1I) = rg \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 2$

EV $v_{11} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, denn $A v_{11} = v_{11}$

HV1 v_{12}: $(A - 1I) v_{12} = v_{11} \Longrightarrow v_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\left(\rightarrow (A - 1I)^2 v_{12} = 0\right)$

HV2 v_{13}: $(A - 1I) v_{13} = v_{12} \Longrightarrow v_{13} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\left(\rightarrow (A - 1I)^3 v_{13} = 0\right)$

Fundamentalsystem

$$y_{h_1}(t) = e^t \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y_{h_2}(t) = e^t \left[t \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} \right] = e^t \begin{bmatrix} 16t \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$y_{h_3}(t) = e^t \left[\frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = e^t \begin{bmatrix} 8t^2 \\ -4t+1 \\ 8t+2 \end{bmatrix}$$

$\boxtimes$

Matrix-Exponentialfunktion

Motivation: $y' = A y$, $y(0) = y_0$ $\xrightarrow{\text{falls } A \text{ skalar}}$ $y(t) = e^{At} y_0$

__Frage__: Gilt dies auch für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Ja, mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion

__Definition__: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $e^{At} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j$,

wobei $A^j := \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{j\text{-mal}}$ Matrix-Potenz

Ist e^{At} "etwas sinnvolles";

$$\| e^{At} \| = \| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j}{j!} \|A^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|t|^j}{j!} \|A\|^j$$

Matrix Norm

$$= e^{|t| \|A\|} < \infty \quad \text{für } t \in (-\infty, \infty)$$

Es gilt $(e^{At})' = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \right)' = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} A^j = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j$

$= A\, e^{At}$. Damit löst

$$y(t) := e^{At}\, y_0$$

das AWP $y' = Ay$, $y(0) = y_0$, denn

$$y'(t) = (e^{At} y_0)' = A\, e^{At} y_0 = A y(t), \quad y(0) = e^{A0} y_0 = y_0.$$

Sei jetzt v EV von A zum EW λ. Dann gilt

$$e^{At} v = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j v = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \lambda^j v = e^{\lambda t} v,$$

d.h. $e^{At} v$ ist dann Fundamentallösung von $y' = Ay$!

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{C}$. Damit schreibe

$$e^{At} v = e^{\lambda I t + (A - \lambda I)t} v = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t} v$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j v$$

Sei λ EW von A und v Hauptvektor zu λ, d.h.

$$(A - \lambda I)^{\sigma} v = 0 \quad \text{und } \sigma \text{ Vielfachheit von } \lambda$$

Dann gilt

$$e^{At} v = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j v = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\sigma - 1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j v,$$

d.h. $e^{At} v$ ist eine Hauptvektorlösung zu $y' = Ay$.

Bsp $y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} y$, $y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dann $y(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$,

denn mit $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^4 = I$

und induktiv $A^{k+4} = A^k$ $k \geq 1$ ergibt sich

$$y(t) = e^{At} y_0 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - + \cdots & t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - + \cdots \\ -t + \frac{t^3}{6} - \frac{t^5}{120} + - & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - + \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - + \cdots \\ 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - + \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

Alternative Lösung über FS: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0$ $\lambda_{1/2} = \pm i$

$v_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ und $v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ EV'en zu $\lambda_{1/2}$

Allgemeine Lösung: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$

$y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies c_1 = \frac{1}{2}$ und $c_2 = -\frac{1}{2} i$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$ (Moivre)

$\implies$ $y(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$.