Differentialgleichungen I
TUHH
VL 4, 8. November 2016

Differentialgleichungen erster Ordnung, Systeme

Michael Hinze

Bestimmen Lösungsmenge von $y'(t) = A(t)\,y(t) + g(t)$ für das Bsp

mit $A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t(1+t^2)} & \frac{1}{t^2(1+t^2)} \\ -\frac{t^2}{1+t^2} & \frac{1+2t^2}{t(1+t^2)} \end{bmatrix}$ $\quad g(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad t>0$

$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$

Ziel: Gebe allgemeine Lösung

$$y(t) = y_{hom}(t) + y_{inh}(t)$$

Beh.: $y^1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ und $y^2(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t} \\ t^2 \end{bmatrix}$ $\quad (t>0)$

bildet ein Fundamentalsystem für $y' = A(t)\,y$, d.h.

i) $(y^i)'(t) = A(t)\,y^i(t)$

ii) $W(t) := \det F(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix} = t^2 + 1 \neq 0 \quad \forall_t$ ✓

$F(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix}$. Damit $y_{inh}(t) = F(t) \int F(t)^{-1} g(t)\,dt$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ -t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(1+t^2)} \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \end{bmatrix} dt = \otimes$$

Einschub: Inverse einer 2x2 Matrix $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

$$(*) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix} \int \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} t + \frac{1}{t} \\ 0 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int \frac{1}{t}\, dt \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ln t \\ t \ln t \end{bmatrix}}_{=: y_{inh}(t)} \quad \checkmark$$

Allgemeine Lösung ist also

$$y(t) = c_1 y^1(t) + c_2 y^2(t) + y_{inh}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{t} \\ t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ln t \\ t \ln t \end{bmatrix}$$

Gebe Anfangswerte vor: $y(t_0) = y^0$

i) $t_0 = 1$ und $y^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$: $y(1) = c_1 y^1(1) + c_2 y^2(1) + y_{inh}(1)$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0$

ii) $t_0 = 1$, $y^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \; c_2 = -\frac{1}{2}$

iii) $t_0 = 1$, $y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 = c_2 = 0$

Spezialfall von $y' = A(t)y + g(t)$: A hat konstante Koeffizienten, d.h. A unabhängig von t.

Betrachte den Fall, dass v EV von A zum EW λ, d.h. es gelte

$$Av = \lambda v$$

Setze $y(t) = e^{\lambda t} v$. Damit

$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} \lambda v = e^{\lambda t} A v = A e^{\lambda t} v = A y(t)$$

Lemma v EV von A zum EW λ. Dann löst $y(t) := e^{\lambda t} v$ die homogene Gleichung $y' = Ay$

Frage: Können wir mit Hilfe der Eigenvektoren von A und den zugehörigen ein FS für $y' = Ay$ konstruieren?

Ja, falls A ein Eigensystem besitzt, das $\mathbb{R}^n$ aufspannt.

Sei A diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit $k \leq n$ die EWe von A mit Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_k$ (d.h. charakt. Polynom $= \pm (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$, d.h. $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$) und EVen v_{ji} ($i = 1, \ldots, r_j$, $j = 1, \ldots, k$), d.h.

$$A v_{ji} = \lambda_j v_{ji} \qquad j = 1, \ldots, k$$

Dann löst

$$\begin{aligned} y_{hom}(t) := \; & e^{\lambda_1 t} \{ c_{11} v_{11} + \cdots + c_{1 r_1} v_{1 r_1} \} + \\ & e^{\lambda_2 t} \{ c_{21} v_{21} + \cdots + c_{2 r_2} v_{2 r_2} \} + \\ & \vdots \\ & e^{\lambda_k t} \{ c_{k1} v_{k1} + \cdots + c_{k r_k} v_{k r_k} \} \end{aligned}$$

das homogene System

und

$$F(t) = \left[e^{\lambda_1 t} v_{11} \cdots e^{\lambda_1 t} v_{1 r_1}, \ldots, e^{\lambda_k t} v_{k1} \cdots e^{\lambda_k t} v_{k r_k} \right]$$

ist Matrix eines Fundamentalsystems, denn

$$W(t) = \det F(t) = \underbrace{e^{r_1 \lambda_1 t} \cdots e^{r_k \lambda_k t}}_{\neq 0 \; \forall t} \underbrace{\det [v_{11} \cdots v_{1 r_1} \cdots v_{k1} \cdots v_{k r_k}]}_{\neq 0, \text{ weil } v_{ij} \text{ Basis}}$$

Was, wenn A <u>nicht</u> diagonalisierbar ist; $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Dann ist $\lambda = 3$ doppelter EW von A, d.h. $r_1 = 2$

EV zu $\lambda = 3$ ist $v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, d.h. $A v^1 = 3 v^1$

$y^1(t) := e^{3t} v^1$ löst $(y^1)' = A y^1$

<u>Bed.:</u> Es gibt weiter linear unabhängige Lösung der Form $e^{\alpha t} v^1$ ✓

Frage: Wie können wir eine weitere, zu y^1 l.u. Lösung konstruieren?

<u>Ansatz</u>: $h(t) = e^{3t} v + t e^{3t} w \qquad (\equiv e^{\lambda t} v + t e^{\lambda t} w)$

Einsetzen in DGL

$$h'(t) = \lambda e^{\lambda t} v + e^{\lambda t} w + \lambda t e^{\lambda t} w$$
$$= \lambda t e^{\lambda t} w + e^{\lambda t}(w + \lambda v)$$
$$\underset{DGL}{\overset{!}{=}} A h(t) = e^{\lambda t} A v + t e^{\lambda t} A w$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = t e^{\lambda t}(A - \lambda I) w + e^{\lambda t}[(A - \lambda I)v - w]$$

$I = Id = E =$ Einheitsmatrix

für alle t! D.h.

i) $(A - \lambda I) w = 0$

ii) $(A - \lambda I) v = w$

$\Longrightarrow (A - \lambda I)^2 v = 0$, d.h. v ist

Hauptvektor von zum EW λ und w ist EV von A zum EW λ

Im Bsp: Wähle $v^1 := w$ (dann gilt $A v^1 = \lambda v^1$) und wähle v als echten Hauptvektor von A zu λ

FS $\quad e^{\lambda t} v^1 \quad , \quad e^{\lambda t} v + t e^{\lambda t} v^1$

Allgemein: $\quad y' = Ay \quad$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sei λ_i EW von A mit $\dim \mathrm{Eig}(\lambda_i) < r_i$ = Vielfachheit des EWs λ_i.

Jordan'sche Normalform von A:

Es r_i lin. unabh. Vektoren $v_{i1}, \dots, v_{ir_i}$ von

$$(A - \lambda_i I)^{r_i} v = 0 \, ,$$

die sogenannten Hauptvektoren

Damit bilden

$$y_{ij}(t) := e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{r_i - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I)^k v_{ij} \qquad j = 1, \dots, r_i$$

linear unabhängige Lösungen von $\quad y' = Ay$