Differentialgleichungen I
TUHH
VL 2, 25. Oktober 2016

Differentialgleichungen erster Ordnung

Michael Hinze

Lineare Differentialgleichungen hat die Form

(*) $\quad y'(t) = \alpha(t)\, y(t) + s(t)$ $\quad$ mit α und s gegebene Funktionen,

d.h. $\quad f(t,y) = \alpha y + s$

DGL in (*) heißt

homogen, falls $s(t) \equiv 0$,

inhomogen, sonst.

a) Lösungsdarstellung im homogenen Fall $\quad y'(t) = \alpha(t)\, y(t)$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt = \int \alpha(t)\, dt$$

Substitution $z = y(t)$: $\quad dz = y'(t)\, dt$, also

$$\int \frac{1}{z}\, dz = \int \alpha(t)\, dt, \quad \text{d.h.} \quad \ln|z| = \int \alpha(t)\, dt + c$$

$$\overset{z=y(t)}{\Longrightarrow} \quad y(t) = \underbrace{e^{c}}_{=:c_0}\, e^{\int \alpha(t)\, dt}, \quad \text{also}$$

$$\boxed{y_{hom}(t) = c_0\, e^{\int \alpha(t)\, dt}}$$ allgemeine homogene Lösung

b) Lösung der inhomogenen Gleichung , $s(t) \neq 0$

Variation der Konstanten

Ansatz für Lösung : $y(t) = C(t)\, e^{\int \alpha(t)\,dt}$

In DGL $y' = \alpha y + s$.

$$y'(t) = C'(t)\, e^{\int \alpha(t)\,dt} + C(t)\,\alpha(t)\, e^{\int \alpha(t)\,dt} \qquad \text{Produktregel}$$

$$\overset{\text{DGL}}{=} \alpha(t)\, y(t) + s(t)$$

$$= \alpha(t)\, C(t)\, e^{\int \alpha(t)\,dt} + s(t)$$

$$\Longrightarrow \quad s(t) = C'(t)\, e^{\int \alpha(t)\,dt} \quad \text{bzw} \quad C'(t) = e^{-\int \alpha(t)\,dt}\, s(t)$$

Integration ergibt

$$C(t) = \int s(t)\, e^{-\int \alpha(t)\,dt}\, dt + C_1 \qquad \text{einsetzen in Ansatz}$$

$$y(t) = e^{\int \alpha(t)\,dt} \left\{ C_1 + \int s(t)\, e^{-\int \alpha(t)\,dt}\, dt \right\}$$

$$= \underbrace{C_1\, e^{\int \alpha(t)\,dt}}_{\substack{\text{homogene Lösung} \\ y_{hom}}} + \underbrace{e^{\int \alpha(t)\,dt} \int s(t)\, e^{-\int \alpha(t)\,dt}\, dt}_{\text{partikuläre Lösung } y_{inh}}$$

Gilt $y(t_0) = y_0$, so ergibt sich

$$y_{hom}(t) = y_0\, e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(s)\,ds} , \qquad y_{inh}(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(\xi)\,d\xi} \int_{t_0}^{t} s(\xi)\, e^{-\int_{t_0}^{\xi} \alpha(\tau)\,d\tau}\, d\xi$$

Bsp.:) Gleichung $y'(t) = -\alpha\, y(t) + \beta$, $t_0 = 0$, α, β konstant . Damit

$$y(t) = \frac{\beta}{\alpha} + \left\{ y_0 - \frac{\beta}{\alpha} \right\} e^{-\alpha t}$$

ii) Bernoulli-Differentialgleichung $\quad y'(t) = \alpha(t)\, y(t) + s(t)\, y(t)^{\varrho}$

mit $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Bemerkung: $\quad \varrho = 0 \quad$ DGL inhomogen, linear

$\varrho = 1 \quad$ DGL homogen linear

Substitution: $\quad z(t) = y(t)^{1-\varrho} \longrightarrow z'(t) = (1-\varrho)\, y'(t)\, y(t)^{-\varrho}$,

also

$$z'(t) = \underbrace{(1-\varrho)\alpha(t)}_{=:\tilde{\alpha}(t)} z(t) + \underbrace{(1-\varrho)\, s(t)}_{=:\tilde{s}(t)} = \tilde{\alpha}(t)\, z(t) + \tilde{s}(t),$$

also ergibt sich inhomogene lineare DGL für z !

$\xrightarrow{2}$ Lösungsformel $\quad z(t) = \ldots$

Rücksubstitution $\quad y(t) = \ldots$

Anwendung auf Bsp iv) VL 1 $\quad$ (log. Wachstum, $\varrho = 2$)

$$P'(t) = \lambda K P(t) - \lambda P^2(t), \qquad P(t_0) = P_0$$

Hier $\quad \alpha(t) = \lambda K, \quad s(t) = -\lambda, \quad \varrho = 2$

Verwende Lösungsherleitung für Bernoulli und erhalte

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-\lambda K (t - t_0)}}$$

Spezialfälle für lineare DGLen $y'(t) = \alpha(t)\,y(t) + s(t)$,
$y(t_0) = y_0$

wobei $\alpha(t) \equiv \alpha$, d.h. konstant bzgl. t und $s(t)$ spezielle Form haben soll.

Wir haben: $y_{hom}(t) = c\, e^{\alpha t}$, $y_{inh}(t) = ?$

$s(t)$	Ansatz für y_{inh}	
$\sum_{k=0}^{m} b_k t^k$	$\sum_{k=0}^{m} B_k t^k$	(bestimme $B_0, \dots, B_m$)
$\left(\sum_{k=0}^{m} b_k t^k\right) e^{at}$	$\left(\sum_{k=0}^{m} B_k t^k\right) e^{at}$, $\alpha \neq a$ $\left(\sum_{k=0}^{m} B_k t^k\right) t\, e^{at}$, $\alpha = a$	
$\left(\sum_{k=0}^{m} b_k t^k\right) \cos bt$ $\left(\sum_{k=0}^{m} b_k t^k\right) \sin bt$	$\left(\sum_{k=0}^{m} A_k t^k\right) \cos bt + \left(\sum_{k=0}^{m} B_k t^k\right) \sin bt$	
$\left(\sum_{k=0}^{m} b_k t^k\right) e^{at} \cos bt$ $\left(\sum_{k=0}^{m} b_k t^k\right) e^{at} \sin bt$	$\left(\sum_{k=0}^{m} A_k t^k\right) e^{at} \cos bt + \left(\sum_{k=0}^{m} B_k t^k\right) e^{at} \sin bt$	

Bsp: i) $y'(t) = \alpha\, y(t) + \beta$, d.h. $s(t) = \beta = b_0$ $(m = 0)$

Ansatz $y_{inh}(t) = B_0$

In DGL:

$$y_{inh}'(t) = B_0' = 0$$

$$= \alpha\, y_{inh}(t) + \beta$$

$$= \alpha\, B_0 + \beta \implies B_0 = -\frac{\beta}{\alpha} = y_{inh}(t)$$

$$y(t) = y_{hom}(t) + y_{inh}(t) = c_1 e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Mit Anfangswerten s. Glukose Bsp.

ii) $y'(t) = 2y(t) + 1 + t^2$, d.h. $\alpha = 2$, $S(t) = 1 + t^3$

Ansatz $y_{inh}(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2$ in DGL einsetzen

$$y_{inh}'(t) = B_1 + 2B_2 t = 2\, y_{inh}(t) + 1 + t^2$$

$$= 2(B_0 + B_1 t + B_2 t^2) + 1 + t^2$$

$$= 2B_0 + 1 + 2B_1 t + (2B_2 + 1)\, t^2$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$y_{inh}(t) = \underbrace{-\frac{3}{4}}_{B_0} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{B_1} t \underbrace{-\frac{1}{2}}_{B_2} t^2$$

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

$$(*) \qquad y'(t) = \frac{g(t)}{h(y(t))}, \quad \text{d.h.} \quad f(t,y) = \frac{g(t)}{h(y)}$$

mit $h(y) \neq 0 \ \forall y$

Formale Lösung von (*): Mult mit $h(y)$ und integrieren

$$\int y'(t)\, h(y(t))\, dt = \int g(t)\, dt + C$$

$t = y$ ergibt

$$\int h(y)\,dy = \int g(t)\,dt + c_1$$

Sei $t_0 := 0$
$y(0) = b$

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds \quad \text{und} \quad H(y) = \int_b^y h(s)\,ds$$

Also implizite Darstellung für y: $H(y) = G(t) + c_1$

$\rightarrow \quad y(t) = H^{-1}(G(t) + c_1)$

H^{-1} existiert, weil $h \neq 0$ n. Vor. und damit H injektiv

$\Rightarrow$ sgL

<u>Bsp</u>: i) $y'(t) = t\,y(t)$ $\qquad h(y) = \frac{1}{y}$, $g(t) = t$

Damit $\quad y(t) = c_1 e^{t^2/2}$

ii) $y'(t) = t\,y^2(t)$. $\qquad g(t) = t$, $h(y) = y^{-2}$

$$\rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{c_1 - \frac{1}{2}t^2}$$