Differentialgleichungen I
TUHH
VL 1, 18. Oktober 2016

Modellierung und Beispiele

Michael Hinze

Motivation: Modellierung von Naturvorgängen

t Zeit, $u(t)$ zeitabhängiger Prozess

Annahmen

i) Wir beobachten den Prozess für eine kleine Zeitspanne Δt, d.h. wir haben eine "Idee" davon, wie sich $u(t)$ während der Zeitspanne $[t, t+\Delta t]$ verändert.

ii) Änderungen von u hängen nur ab vom Zeitpunkt t, dem bestehenden Zustand $u(t)$ und der Länge des Beobachtungszeitraums Δt.

iii) Bei t ist Änderung von $u(t)$ proportional zu Δt

$$=: \Delta u = u(t+\Delta t) - u(t)$$

Damit ergibt sich

$$\Delta u = f(t, u(t))\, \Delta t$$

$f \,\hat{=}\,$ Idee vom Prozess

Einsetzen liefert

$$\Delta u = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = f(t, u(t)) \cancel{\Delta t} \qquad : \Delta t$$

Grenzwertbildung $\Delta t \to 0$: $\boxed{u'(t) = f(t, u(t))}$ 1

Sei t_0 Startzeitpunkt unserer Beobachtung. Gebe $\boxed{u_0 := u(t_0)}$ 2 vor (Momentaufnahme zu Beobachtungsbeginn)

Annahme IV.) 1 zusammen mit 2 legen u eindeutig fest.

<u>Bsp 1</u>: Künstliche Ernährung über Glukoseinfusionen. Dabei

$u(t)$ Glukosegehalt zum Zeitpunkt t

$u_0 = u(0)$ Anfangsglukosegehalt (OE $t_0 := 0$)

β Gramm/Minute konstante Glukose Zufuhrrate

<u>Idee</u>: "Glukoseabbau proportional zum vorhandenen Glukosegehalt"

Bilanz

$$u'(t) = \beta - \alpha u(t), \qquad u(0) = u_0$$

Lösung $u(t) = ?$ Setze $z(t) := u(t) - \frac{1}{\alpha}\beta$ "Hilfsprozess"

Dann

$$z'(t) = u'(t) = -\alpha z(t)$$

und

$$z(0) = u(0) - \frac{\beta}{\alpha} = u_0 - \frac{\beta}{\alpha} =: z_0$$

Damit ergibt sich

$$z(t) = z_0\, e^{-\alpha t}$$

Probe: $z'(t) = -\alpha \underbrace{z_0\, e^{-\alpha t}}_{z(t)}$

Formale Herleitung: $z'(t) = \frac{dz}{dt} = -\alpha z$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dz}{z} = -\alpha\, dt$$

$$\Longrightarrow \quad \int \frac{dz}{z} = -\alpha \int dt$$

$$\ln z(t) - \ln z_0 = -\alpha t \quad \Rightarrow \quad z(t) = z_0\, e^{-\alpha t}$$

Wir haben $z(t) = z_0\, e^{-\alpha t}$. Damit ergibt sich

$$\boxed{u(t) = \frac{\beta}{\alpha} + \left(u_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha t}}$$

Frage: Glukose Gleichgewicht

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = \frac{\beta}{\alpha}$$

II

Bsp 2: Absorption in homogenen Medien

$u(x)$ Energie am Ort x

$u(x_0)$ Energie am Ort x_0 bekannt

Idee: Dringt Energie in ein homogenes Medium, so nimmt sie durch Absorption (= Umwandlung in andere Energieformen) ab.

Und die Abnahme ist proportional zur vorhandenen Energie

Bilanz: $u'(x) = -\beta u(x)$, $u(0) = u_0$ OE $x_0 := 0$

Damit $u(x) = u_0 e^{-\beta x}$ β Proportionalitätskonstante.

Halbwertlänge l: $\frac{1}{2} u_0 = u_0 e^{-\beta l}$ $\Rightarrow$ $l = \frac{1}{\beta} \ln 2$

Bsp 3: Höhenformel

$p(x)$ Druck, $\varrho(x)$ Dichte der Atmosphäre in Höhe x über 0

Frage: Wie ändert sich der Druck mit der Höhe

Kraft, welche eine Atmosphärensäule mit Grundfläche A und Höhe Δx ausübt (g sei Erdbeschleunigung):

$$g \varrho(x) \Delta x A .$$

Druckänderung über Δx: $\frac{p(x) - p(x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{g \varrho(x) \cancel{\Delta x} \cancel{A}}{\cancel{A}}$ $: \Delta x$

$\xRightarrow{\Delta x \to 0}$ $p'(x) = -g \varrho(x)$

Nur eine DGL für zwei Funktionen $p(x)$ und $\varrho(x)$.

Gesetz von Boyle-Mariott für ideale Gase

Phänomen $\frac{p(x)}{\varrho(x)} = \frac{p_0}{\varrho_0}$ $\longrightarrow$ $\varrho(x) = \frac{\varrho_0}{p_0} p(x)$.

Damit in die DGL $\rho' = -g\varrho$:

$$\rho'(x) = -g\frac{\varrho_0}{\rho_0}\rho(x), \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \text{also } \boxed{\rho(x) = \rho_0 e^{-g\frac{\varrho_0}{\rho_0}x}}$$

Bsp 4 Logistisches Wachstum einer Population

$P(t)$ Populationsgröße zur Zeit t, $P(t_0)$ Ausgangspopulation

K Maximalgröße, die s.g. Trägerkapazität

Idee: Wachstumsrate proportional zur vorhandenen Population $P(t)$ und der verbleibenden Kapazität $K - P(t)$

Damit

$$P'(t) = \lambda P(t)(K - P(t)), \quad P(0) = P_0$$

Lösung:

$$P(t) = \frac{K}{1 - \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-\lambda K t}}$$

Hausaufgabe: i) Diskussion

ii) Einführung eines Räubers, etwa Marienkäfer Modell?