Buch Kap. 6.13 – Randwertaufgaben 2ter Ordnung

Auf $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ seien $a_0 \neq 0$, a_1, a_2 und r vorgegebene stetige Funktionen, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$ ($i = 1{,}2$) und für $y \in C^2(I)$ (= 2 mal stetig auf I differenzierbare Funktionen) sei

$$D[y] := a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y, \quad R_1(y) := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a)$$
$$\text{und } R_2(y) := \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b).$$

Dann heißt die Aufgabe *Finde* $y \in C^2(I)$ *mit*

$$D[y] = r \text{ und } R_1(y) = \gamma_1,\ R_2(y) = \gamma_2$$

Randwertaufgabe 2ter Ordnung für y.

Buch Kap. 6.13 – Randwertaufgaben 2ter Ordnung

Seien y_1, y_2 ein Fundamentalsystem und y_p partikuläre Lösungder DGL

$$D[y] = a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = r,$$

sowie

$$r_1 := \gamma_1 - \alpha_1 y_p(a) - \beta_1 y_p'(a) \text{ und } r_2 := \gamma_2 - \alpha_2 y_p(b) - \beta_2 y_p'(b).$$

Satz: Ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

lösbar, so besitzt die Randwertaufgabe

$$D[y] = r \text{ und } R_1(y) = \gamma_1, \; R_2(y) = \gamma_2$$

eine Lösung $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$. Diese ist eindeutig, gdw

$$\text{die Matrix } \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix}$$

regulär ist.

Buch Kap. 6.13 – Eigenwertaufgaben 2ter Ordnung

Sei p auf $[a, b]$ stetig diffbar und $p(x) > 0$ für $x \in (a, b)$, q sei stetig auf $[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann heißt

$$L[y] := -(py')' + qy = \lambda y, \quad \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0$$
$$\text{und } \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

Eigenwertproblem (nach Sturm-Liouville) und eine Funktion y, welche das Problem löst, Eigenlösung zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dabei soll wieder $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$ $(i = 1{,}2)$ vorausgesetzt werden.

Buch Kap. 6.13 – Eigenwertaufgaben 2ter Ordnung

In der verallgemeinerten homogenen Sturm-Liouville Differentialgleichung

$$L[y] + \lambda w y = -(p(x)y')' + q(x)y - \lambda w y = 0$$

seien p stetig differenzierbar, q, w stetig und $p, w > 0$ auf (a, b). Ferner sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

Dann gilt für zwei zu $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gehörende, nichttriviale Lösungen $y_1, y_2 \in C^2([a, b], \mathbb{R})$

$$< y_1, y_2 >= \int_a^b y_1(x) y_2(x) w(x)\, dx = 0,$$

falls

(a) y_1 und y_2 homogene Randbedingungen (s. vorherige Folie) erfüllen, also λ_1, λ_2 Eigenwerte und y_1, y_2 Eigenfunktionen sind, oder
(b) die Koeffizientenfunktion $p(x)$ die Bedingung $p(a) = p(b) = 0$ erfüllt.

Buch Kap. 6.13 – Eigenfunktionen (Satz 6.15,6.16)

Eigenfunktionen und -werte der Eigenwertaufgabe

$$L[y] + \lambda w y = -(p(x)y')' + q(x)y - \lambda w y = 0$$

besitzen folgende Eigenschaften:
(a) Es gibt ∞-viele Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$

Insbesondere sind alle Eigenwerte einfach.
(b) Jede Eigenfunktion y_n (zu λ_n) besitzt in (a, b) genau n Nullstellen.
(c) Seien $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Eigenfunktionen mit $\langle y_i, y_j\rangle = \delta_{ij}$. Ferner sei f auf $[a, b]$ stetig diffbar und erfülle dort die Randbedingungen der Eigenfunktionen. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, y_i\rangle y_i(x) \text{ für alle } x \in [a, b]$$

und die Reihe konvergiert gleichmässig auf $[a, b]$.