Buch Kap. 6.14 – Autonome Systeme

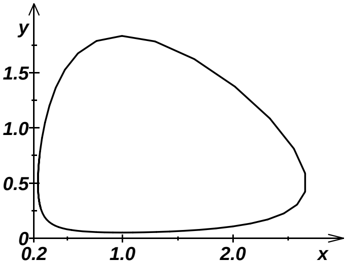
Definition 6.15: (autonomes System) Hängt die Abbildung f des dynamischen Systems nicht von t ab, d.h. gilt

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dann heißt das System autonom.

Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $f(x_0) = 0$ heißen Gleichgewichtspunkte des autonomen Systems.

Buch Kap. 6.14 – Räuber-Beute Diagramme



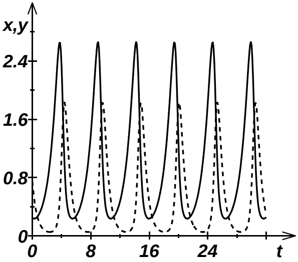


Abbildung 6.19, 6.20: Phasenkurve des Räuber-Beute Systems (links), zeitliche Entwicklung der Populationen *x* und *y* des Räuber-Beute Systems

Buch Kap. 6.14 – Autonome Systeme, Stabilität

Definition 6.16: Ein Gleichgewichtspunkt $\mathbf{x}_0$ eines autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ heißt

a) **attraktiv, falls Lösungen $\mathbf{x}(t)$, die in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ starten, gegen den Gleichgewichtspunkt konvergieren. D.m. es gibt $\delta > 0$, s.d.**

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$$

für jede Lösung $\mathbf{x}(t)$ mit $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta$,

b) **stabil, falls Lösungen $\mathbf{x}(t)$, die in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ starten, in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ bleiben. D.m. zu jedem $\epsilon > 0$ ex. ein $\delta > 0$, s.d. für Lösungen mit $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta$ schon**

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| < \epsilon \text{ für alle } t > 0 \text{ folgt,}$$

c) **asymptotisch stabil, falls er attraktiv und stabil ist, und**

d) **instabil, falls es Lösungen gibt, die sich von x_0 entfernen, auch wenn sie in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ starten.**

Buch Kap. 6.14 – Stabilität autonomer DGLen

Satz 6.14: (Stabilität linearer autonomer Systeme) Der Gleichgewichtszustand des linearen Systems $\dot{x} = Ax$ ist

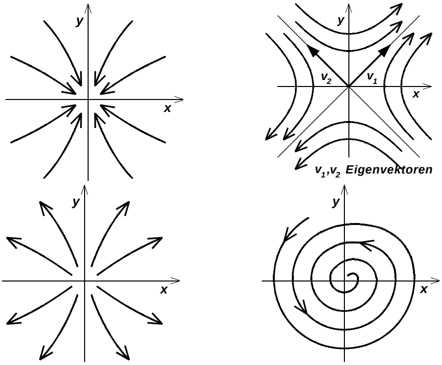
a) **asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte von A negative Realteile haben,**

b) **stabil, falls kein Eigenwert von A einen positiven Realteil hat, und**

für Eigenwerte mit dem Realteil Null die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit ist,

c) **instabil, falls ein Eigenwert von A einen positiven Realteil hat oder ein Eigenwert von A mit dem Realteil Null existiert, dessen geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische Vielfachheit ist.**

Buch Kap. 6.14 – Stabilität



Abbildungen 6.22-6.25: Eigenwerte $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ (ol), $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (or), $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ (ul), $\lambda = a + ib$, $a < 0$ (ur).

Buch Kap. 6.14 – Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme

Satz 6.15:(Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme) Der Gleichgewichtszustand x_0 des nichtlinearen autonomen Systems $\dot{x} = F(x)$ ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Ableitungsmatrix $F'(x_0)$ einen negativen Realteil haben. Der Gleichgewichtspunkt x_0 ist instabil, wenn mindestens ein Eigenwert von $F'(x_0)$ einen positiven Realteil hat.