Buch Kap. 6.8 – Numerische Lösungsmethoden

Die Methode von EULER

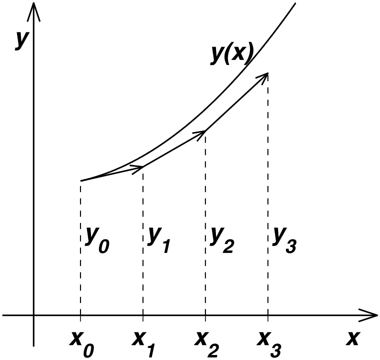

Abbildung 6.8: Explizite EULER—Methode

Buch Kap. 6.10 – Numerische Lösungsmethoden

Definition 6.7 (lokaler Diskretisationsfehler): Unter dem lokalen Diskretisationsfehler an der Stelle x_{k+1} versteht man den Wert

$$d_{k+1} := y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h).$$

Dabei bezeichnet Φ die Verfahrensfunktion des verwendeten Zeitintegrationsverfahrens.

Der lokale Diskretisierungsfehler beschreibt den Fehler, der entsteht, falls die exakte Lösung der Differentialgleichung in die Verfahrensfunktion eingesetzt wird. Er macht demnach eine Aussage über die Konsistenz des verwendeten Integrationsverfahrens.

Buch Kap. 6.8 – Numerische Lösungsmethoden

Definition 6.8 (globaler Diskretisationsfehler) Unter dem globalen Diskretisationsfehler g_k an der Stelle x_k versteht man den Wert

$$g_k := y(x_k) - y_k \ .$$

Der globale Diskretisierungsfehler gibt den tatsächlichen Fehler an zwischen numerisch mit Hilfe des Integrationsverfahrens ermittelter Näherungslösung und exakter Lösung der DGL.

Buch Kap. 6.10 – Numerische Lösungsmethoden

Für den globalen Diskretisierungsfehler gelten mit $hL < 1$ die Abschätzungen

$$|g_{k+1}| \leq \frac{1+hL}{1-hL}|g_k| + \frac{|d_{k+1}|}{1-hL} \text{ (implizites Verfahren) und}$$

$$|g_{k+1}| \leq (1+hL)|g_k| + |d_{k+1}| \text{ (explizites Verfahren).}$$

Dabei bezeichnet L die Lipschitzkonstante der Verfahrensfunktion und $h > 0$ die Schrittweite.

Satz 6.11 (1. Abschätzung des globalen Diskretisierungsfehlers): Erfüllen die Werte g_k obige Abschätzung, so gilt

$$|g_n| \leq b\frac{(1+a)^n - 1}{a} + (1+a)^n|g_0| \leq \frac{b}{a}[e^{na} - 1] + e^{na}|g_0| \; .$$

Buch Kap. 6.10 – Numerische Lösungsmethoden

Satz 6.12 (2. Abschätzung des globalen Diskretisierungsfehlers): Für den globalen Fehler g_n an der festen Stelle $x_n = x_0 + n\,h$ gilt für eine explizite Einschrittmethode

$$|g_n| \le \frac{D}{hL}[e^{nhL} - 1] \le \frac{D}{hL}e^{nhL},$$

und für eine implizite Methode mit $\frac{1+hL}{1-hL} =: 1 + Kh$

$$|g_n| \le \frac{D}{hK(1-hL)}[e^{nhK} - 1] \le \frac{D}{hK(1-hL)}e^{nhK}.$$

Buch Kap. 6.10 – Numerische Lösungsmethoden

Definition 6.9 (Fehlerordnung): Ein Einschrittverfahren besitzt die Fehlerordnung bzw. Konsistenzordnung p, falls für seinen lokalen Diskretisierungsfehler d_k die Abschätzung

$$\max_{1\leq k\leq n} |d_k| \leq D = \text{const.} \cdot h^{p+1} = O(h^{p+1})$$

erfüllt ist.

Ist die Verfahrensfunktion Lipschitz-stetig, so erhalten wir für den globalen Diskretisierungsfehler

$$|g_n| \leq \frac{C}{L} e^{nhL} h^p \equiv O(h^p).$$

Buch Kap. 6.10 – Numerische Lösungsmethoden

Konstruktion von Verfahren höherer Ordnung

$h_1 = h$ und $h_2 = \frac{h}{2}$. Für die mit Euler erhaltenen Werte y_n und y_{2n} nach n, bzw. $2n$ Integrationsschritten gilt näherungsweise

$$\begin{aligned} y_n &\approx y(x) + c_1 h + O(h^2) \\ y_{2n} &\approx y(x) + c_1 \frac{h}{2} + O(h^2)\,. \end{aligned}$$

Richardson-Extrapolation (geschickte Linearkombination) liefert

$$\tilde{y} = 2y_{2n} - y_n \approx y(x) + O(h^2)\,,$$

Buch Kap. 6.10 – Verbessertes Euler Verfahren

Euler-Methode mit der Schrittweite h ergibt

$$y_{k+1}^{(1)} = y_k + hf(x_k, y_k)\ .$$

Ein Doppelschritt mit der Schrittweite $\frac{h}{2}$ ergibt sukzessive

$$y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k), \quad y_{k+1}^{(2)} = y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} + \frac{h}{2} f(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)})\ .$$

Richardson-Extrapolation mit $y_{k+1}^{(2)}$ und $y_{k+1}^{(1)}$ ergibt

$$y_{k+1} = 2y_{k+1}^{(2)} - y_{k+1}^{(1)} = y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k))\ .$$

Algorithmisch:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h\, k_2 \end{aligned}$$

Buch Kap. 6.10 – Trapez Verfahren

Differentialgleichung integrieren ergibt

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\, dx$$

Integral mit Trapezregel approximieren

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

ergibt die Trapezmethode (implizit in y_{k+1}).

Fixpunktiteration:

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad y_{k+1}^{(s+1)} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(s)})]\ , \quad s = 0,1,2\ldots,$$

konvergent gegen y_{k+1}, falls $f(x, y)$ Lipschitz-stetig mit L und $\frac{hL}{2} < 1$ erfüllt ist, weil damit die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind.

Buch Kap. 6.10 – Numerische Lösungsmethoden

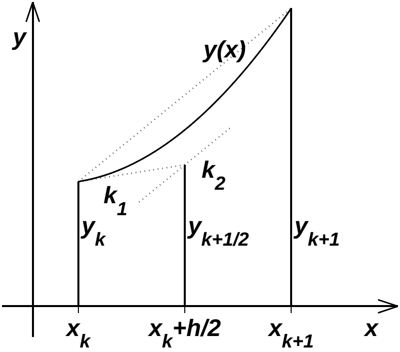

Abbildung 6.9: Verbesserte Polygonzug—Methode nach Euler

Buch Kap. 6.10 – Numerische Lösungsmethoden

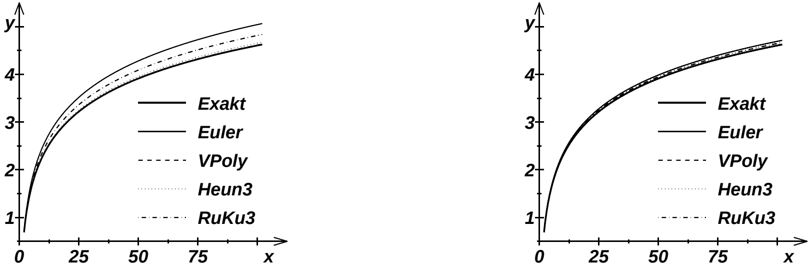

Abbildung 6.10: Numerische Lösung von $y' = \frac{1}{x \ln x} y$, $y(2) = \ln 2$ für verschiedene Verfahren. Integrationsschrittweite $h = 0\ 5$ (links), $h = 0\ 1$ (rechts).