Buch Kap. 6.8 – Lineare DGL n-ter Ordnung

Definition 6.3: Folgt aus der Beziehung

$$\alpha_1(x)y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x) + \cdots + \alpha_n(x)y_n(x) = 0 \text{ auf } [a, b]$$

für n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ einer homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

$n-$ter Ordnung das Verschwinden sämtlicher Koeffizienten, also $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, so heisst $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Buch Kap. 6.8 – Wronski–Determinante

Definition 6.4: Seien $y_1, y_2, \ldots, y_n$ beliebige Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $n-$ter Ordnung, dann heißt

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

WRONSKI**−Determinante dieser n Lösungen.**

Buch Kap. 6.8 – Lösbarkeit DGL n−ter Ordnung

Satz 6.10: Die Funktionen $a_i(x)$, $i = 0,1,\dots n-1$, seien stetig auf $[a,b]$.

a) **Dann gibt es ein Fundamentalsystem $y_1, \dots, y_n$ von**

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

und jede Lösung der Differentialgleichung besitzt die Form

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_1, \dots, c_n$.

b) **Je n Lösungen der homogenen Differentialgleichung bilden ein Fundamentalsystem, wenn ihre** Wronski**−Determinante $W(x)$ nirgends auf $[a,b]$ verschwindet (Gilt $W(x_0) \equiv 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$, so folgt daraus $W(x) \equiv 0$ auf ganz $[a,b]$).**

Buch Kap. 6.8 – Fortsetzung Satz 6.10

c) **Sei die Funktion $g(x)$ stetig auf $[a, b]$. Sei $y_p(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung**

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x) .$$

Ist dann $y_1, \dots, y_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung, so sind durch

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

mit Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der linearen inhomogenen Differentialgleichung $n-$ter Ordnung erfasst.

Buch Kap. 6.8 – Inhomogene Differentialgleichungen 2-ter Ordnung

Die allgemeine Lösung der DGL

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$$

hat die Form

$$y(x) = \left[C_1 - \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}dx\right] y_1(x) + \left[C_2 + \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx\right] y_2(x),$$

wobei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bildet.

Diese Lösungsdarstellung gilt natürlich auch für konstante Koeffizienten.

Buch Kap. 6.8 – Reduktion der Ordnung bei DGLen

Sei $u(x) \neq 0$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung $n-$ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0 \ .$$

Dann führt der Produktansatz

$$y(x) = v(x)u(x)$$

auf eine homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung $n-1$ für $w := v'$;

$$w^{(n-1)} + b_{n-1}(x)w^{(n-2)} + \ldots + b_1(x)w = 0 \ .$$

Ist $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ein Fundamentalsystem dieser reduzierten Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung und bezeichnen $v_1, \ldots, v_{n-1}$ Stammfunktionen von $w_1, \ldots, w_{n-1}$, so bilden

$$u, uv_1, \ldots, uv_{n-1}$$

ein Fundamentalsystem der Ausgangs – Differentialgleichung.