Buch Kap. 6.7 – Matrix Exponentialfunktion

Homogene Anfangswertprobleme für Systeme der Form ($A \in \mathbb{R}^{n,n}$, y, $y_0 \in \mathbb{R}^n$)

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(0) = y_0$$

werden in Analogie zum skalaren Fall $n = 1$ mit Hilfe der Matrix Exponentialfunktion

$$e^A := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i$$

durch

$$y(t) = e^{tA} y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i y_0$$

gelöst.

Buch Kap. 6.7 – Matrix Exponentialfunktion

Ist v Hauptvektor zum Eigenwert λ, d.h. gilt

$$(A - \lambda I)^\sigma v = 0,$$

wobei σ die algebraische Vielfachheit von λ bezeichne, so ergibt

$$y(t) = e^{At} v = e^{\lambda t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} (A - \lambda I)^i v =$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{i=1}^{\sigma - 1} \frac{t^i}{i!} (A - \lambda I)^i v$$

die entsprechende Hauptvektorlösung. Dabei ist jeder Eigenvektor v natürlich auch Hauptvektor (nullter Stufe).