Buch Kap. 6.7 – Systeme mit konstanten Koeffizienten

Satz 6.6: Sei A eine konstante $n \times n$ Matrix mit reellen Elementen, λ ein Eigenwert von A und $\mathbf{v}$ ein zu λ gehörender Eigenvektor. Dann ist $\mathbf{y} = e^{\lambda x}\mathbf{v}$ eine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Hat die Matrix A n voneinander verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit dazugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen $\mathbf{y}_1 = e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1$,...,$\mathbf{y}_n = e^{\lambda_n x}\mathbf{v}_n$ ein Fundamentalsystem und durch die Linearkombinationen

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}\mathbf{v}_n$$

sind sämtliche Lösungen von $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ gegeben.

Buch Kap. 6.7 – Lösungsmenge homogener Systeme

Satz 6.7: Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$ Matrix A mit der algebraischen Vielfachheit σ und $\mathrm{v}_1,\ldots,\mathrm{v}_\sigma$ linear unabhängige Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^\sigma \, \mathrm{v} = 0\,,$$

(sogenannte Hauptvektoren nullter bis $(\sigma - 1)-$ter Stufe), dann sind

$$\mathrm{y}_k = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \, \mathrm{v}_k \;, \quad k = 1, \ldots, \sigma,$$

linear unabhängige Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\mathrm{y}' = A\mathrm{y}.$$