Buch Kap. 6.6 – Differentialgleichung vom Typ $F(x, y', y'') = 0$

Mit der Substitution $v := y'$ ergibt sich mit

$$F(x, v, v') = 0 \tag{3}$$

eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion v. Ist $v = \Psi(x, C)$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3), so erhält man mit

$$y(x) = \int \Psi(x, C)\, dx + C_1, \qquad C, C_1 \in \mathbb{R} \tag{4}$$

die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung 2. Ordnung.

Beispiel: Für $y'' = 5y' \ln x,\ \ x > 0$ ergibt sich

$$y(x) = C_1 \int x^{5x} e^{-5x}\, dx + C_2$$

eine Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung.

Buch Kap. 6.6 – Differentialgleichung vom Typ $F(y, y', y'') = 0$

Mit

$$v(y) := y'$$

erhält man aus der Kettenregel

$$y'' = \frac{d}{dx} v(y) = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v'(y)y' = v'(y)v(y).$$

Damit erhält man statt der ursprünglichen Differentialgleichung 2. Ordnung die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$F(y, v, v'v) = 0 \tag{5}$$

für v. Ist $v = \Psi(y, C)$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5), so ergibt sich aufgrund des Ansatzes $v(y) = y'$ mit

$$y' = \Psi(y, C)$$

eine Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen für y mit der allgemeinen impliziten Lösung

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\zeta}{\Psi(\zeta, C)} = x + C_1, \qquad C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Buch Kap. 6.6 – Bsp Lösung durch Transformationen

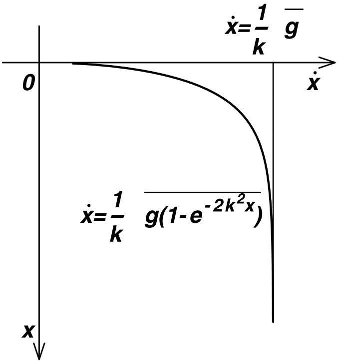

Abbildung 6.7: Fallgeschwindigkeit $\dot{x}$ eines Fallschirmspringers in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg x

Buch Kap. 6.6 – Ähnlichkeits-DGLen

a) Differentialgleichungen der Form $y' = \phi(\frac{y}{x})$:

Substitution liefert DGL mit getrennten Variablen. Fordere ϕ stetig und $x \neq 0$.

$$u = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = x\,u \quad \rightarrow \quad y' = u + x\,u' = \phi(u)$$

$$x\,u' = \phi(u) - u \quad \rightarrow \quad u' = \frac{\phi(u) - u}{x} \,.$$

Damit

$$\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{du}{\phi(u) - u} = \ln|x| + C \,.$$

b) Differentialgleichungen der Form $y' = \phi(ax + by + c),\ b \neq 0$:

Substitution $z = ax + by + c$ und $z' = a + by'$ ergibt

$$y' = \frac{z' - a}{b} = \phi(z)$$

und damit

$$z' = a + b\phi(z) \,,$$

also eine DGL mit getrennten Variablen.

Buch Kap. 6.7 – DGL Systeme erster Ordnung

Satz 6.2: Die Elemente der Matrix $A(x)$, also die Funktionen $a_{ij}(x)$ und die Komponenten von $\mathrm{g}(x)$ seien stetig im Intervall $[a, b]$.

Dann hat das System $\mathrm{y}' = A(x)\,\mathrm{y} + \mathrm{g}(x)$ mindestens eine Lösung.

Sei $x_0 \in [a, b]$ und $(y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})^T$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathrm{y}' = A(x)\,\mathrm{y} + \mathrm{g}, \quad \mathrm{y}(x_0) = \mathrm{y}_0\ ,$$

genau eine Lösung auf ganz $[a, b]$.

Buch Kap. 6.7 – Homogene Systeme

Satz 6.3: Sind die Elemente der Matrix $A(x)$, also die Funktionen $a_{ij}(x)$, in $[a, b]$ stetig, dann besitzt das homogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$$

auf $[a, b]$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Definition: Ein solches System $y_1, \ldots, y_n$ von linear unabhängigen Lösungen heißt *Fundamentalsystem* **und jedes y_i** *Fundamentallösung***.**

Buch Kap. 6.7 – Wronski Determinante

Definition 6.2: Bezeichnen $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$,. . . , $\mathbf{y}_n$ Lösungen des Systems

$$\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$$

und bezeichne $Y(x)$ die Matrix mit Spalten $\mathbf{y}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$W(x) := \det\ Y(x)$$

WRONSKI—**Determinante.**

Buch Kap. 6.7 – Wronski Test

Satz 6.4: Seien $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots \mathrm{y}_n$ Lösungen von

$$\mathrm{y}' = A(x)\,\mathrm{y}$$

auf dem Intervall $[a, b]$. Sind die Elemente von $A(x)$ auf $[a, b]$ stetig, so gilt

a) $W(x) \equiv 0$ **oder** $W(x) \neq 0$ **für alle** $x \in [a, b]$.
b) **Die Lösungen $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots \mathrm{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $[a, b]$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$ ist.**

Buch Kap. 6.7 – Lösungsmenge homogener Systeme

Satz 6.5: Durch $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots \mathbf{y}_n$ sei auf $[a, b]$ ein Fundamentalsystem von $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$ gegeben. Dann lässt sich jede Lösung $\mathbf{y}$ auf $[a, b]$ in der Form

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n$$

darstellen, wobei $c_1, c_2, \dots, c_n$ Konstanten sind, die reell oder komplex sein können. $\mathbf{y}$ in dieser Form heißt auch allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}.$$

Buch Kap. 6.7 – DGLsysteme erster Ordnung – Lösungsstruktur

Satz 6.8: Sei $\mathbf{y}_p$ irgendeine Lösung des inhomogenen linearen Systems $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{g}$ und sei $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots \mathbf{y}_n$ ein Fundamentalsystem und damit $\mathbf{y}_h = c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n$ die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$.

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen Systems die Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_p + \mathbf{y}_h$$

mit Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$, die reell oder komplex sein können.

Buch Kap. 6.7 – Variation der Konstanten

Satz 6.9: Durch $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots \mathbf{y}_n$ sei ein Fundamentalsystem von $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$ auf $[a, b]$ gegeben. Weiterhin sei

$$Y(x) := [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_n].$$

Sind die Koordinaten von $\mathbf{g}$ stetig in $[a, b]$, so ist

$$\mathbf{y}_p(x) = Y(x) \cdot \mathbf{c}(x)$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

$$\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{g}.$$

Dabei gilt $\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{c}'(x)\,dx$ und $\mathbf{c}'(x) = (c_1'(x), \dots, c_n'(x))^T$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{g}.$$