# Buch Kap. 6.3 – Existenz- und Einzigkeitssatz

**Satz 6.1: Das Anfangswertproblem**

$$y' = f(x,y),\; y(x_0) = y_0$$

**mit $(x_0, y_0) \in D_f := [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, $\; a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ fest, besitzt mindestens eine Lösung, falls $f(x,y)$ auf $D_f$ eine stetige Funktion darstellt.**

**Ist die Funktion $f$ zudem für jedes $x \in [a_1, a_2]$ Lipschitz−stetig bzgl. $y$, d.m. gilt $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ für alle $y_1, y_2 \in [b_1, b_2]$, dann ist die Lösung eindeutig.**

**Zu jedem $(x_0, y_0) \in D_f$ gibt es dann auch ein maximales Intervall $I$ um $x_0$ mit**

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ für alle } x \in I \text{ und } y(x_0) = y_0,$$

**und die Lösung $y(x)$ lässt sich nicht auf ein größeres Intervall fortsetzen.**

# Buch Kap. 6.3 – Existenz und Einzigkeit

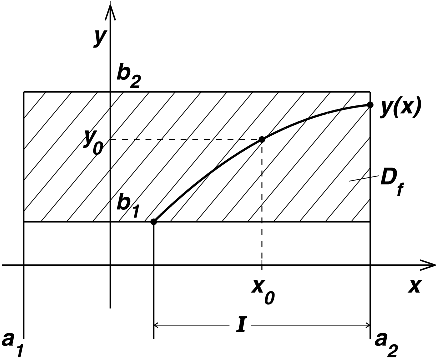


**Abbildung 6.2: Zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz,**
$y'(x) = f(x, y(x))$ **mit** $y(x_0) = y_0$.

# Buch Kap. 6.3 – Bspe DGLen erster Ordnung

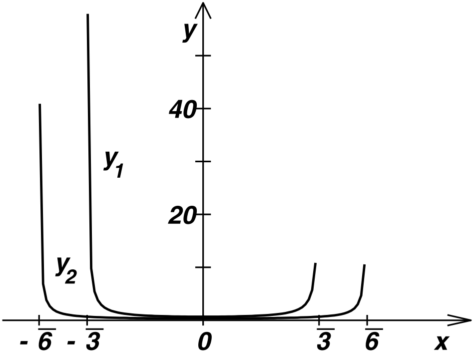


**Abbildung 6.3:** $y' = xy^2$ **hat Lösungsschar** $y = \frac{1}{C - x^2/2}$ **mit** $C = \frac{1}{y_0} + \frac{x_0^2}{2}$**, falls** $(x_0, y_0)$ **den Anfangwert bezeichnet. Dargestellt sind die Lösungen** $y_1$ **und** $y_2$ **der Differentialgleichung für** $(x_0, y_0) = (1{,}1)$**, d.h.** $C = 1{,}5$**, und** $(x_0, y_0) = (2{,}1)$**, d.h.** $C = 3$**.**

# Buch Kap. 6.3 – Mehrdeutigkeit

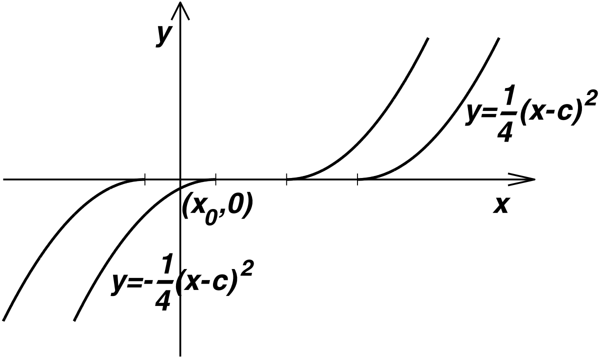


**Abbildung 6.5:** $y'(x) = \sqrt{|y(x)|}$ **mit singulärer Lösung** $y(x) \equiv 0$

# Buch Kap. 6.4 – DGLen mit trennbaren Variablen

**Lösung einer Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen**

1) **Schreibe die Differentialgleichung $y' = \frac{g(x)}{h(y)}$ in der Form $h(y)\,y'(x) = g(x)$ bzw. $h(y)\,dy = g(x)\,dx$.**
2) **Integriere die linke Seite bezüglich $y$ und die rechte Seite bezüglich $x$.**
3) **Falls möglich, löse die dadurch entstehende Gleichung**

$$H(y) = G(x) + C$$

**nach $y$ auf. Ansonsten ist die Lösung $y(x)$ in impliziter Form gegeben.**

# Buch Kap. 6.4 – DGLen mit trennbaren Variablen, Beispiel 1

**Betrachte für $y > 0$ bzw. $y < 0$**

$$y' = x\,y\ ,$$

**Schreibe**

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

**und integriere die linke Seite bezüglich $y$, die rechte bezüglich $x$ und erhalten**

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_0\ , \quad \text{also} \quad |y| = e^{\frac{x^2}{2}+C_0} = e^{C_0}\,e^{\frac{x^2}{2}}\ .$$

**Damit folgt $y = \pm e^{C_0}\,e^{\frac{x^2}{2}} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ $(C \neq 0)$. Für $C = 0$ ergibt sich die zunächst ausgeschlossene Lösung $y \equiv 0$.**

# Buch Kap. 6.4 – DGLen mit trennbaren Variablen, Beispiel 2

**Betrachte**

$$y' = \sin x \cos y,$$

**deren Richtungsfeld wir in Abb. 6.1 dargestellt haben.**

**Um die Gleichung durch $\cos y$ dividieren zu können, müssen wir $\cos y \neq 0$ bzw. $y \neq (k + \frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, fordern. Diese Forderung bedeutet, dass wir die konstanten Lösungen $y \equiv (k + \frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, der Differentialgleichung nicht mit der Methode der Trennung der Veränderlichen bestimmen können, was ja auch nicht nötig ist.**
**Es ergibt sich**

$$\frac{y'}{\cos y} = \sin x \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dy}{\cos y} = \int \sin x \; dx \; .$$

**Integration ergibt $\ln|\tan(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4})| = -\cos x + C_0$ und damit**

$$y(x) = 2\arctan(Ce^{-\cos x}) - \frac{\pi}{2} \qquad (C \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

# Buch Kap. 6.4 – DGLen mit trennbaren Variablen, chemische Reaktion

**Chemische Reaktion erster Ordnung (Sättigungskonzentration $c_0$ und Reaktionskonstante $k > 0$):**

$$y' = k(c_0 - y).$$

**Mit $g(t) = k =$ const. und $h(y) = \frac{1}{c_0 - y}$ ergibt sich**

$$\frac{dy}{c_0 - y} = k\,dt\ .$$

**Nach Integration**

$$\int \frac{dy}{c_0 - y} = k \int dt + C\ , \quad \text{also} \quad -\ln|c_0 - y| = \ln\frac{1}{|c_0 - y|} = k\,t + C\ .$$

**Auflösung nach $y$ ergibt**

$$\frac{1}{|c_0 - y|} = e^{k\,t + C} = e^{C}\,e^{k\,t} \quad \text{bzw.} \quad c_0 - y = \pm e^{-C}\,e^{-k\,t} = C_1 e^{-k\,t}$$

**und damit die allgemeine Lösung**

$$y(t) = c_0 - C_1 e^{-k\,t}\ .$$

# Buch Kap. 6.4 – DGLen mit trennbaren Variablen

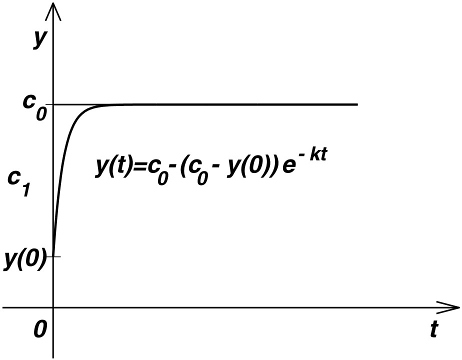


**Abbildung 6.6: Chemische Reaktion 1. Ordnung**

# Buch Kap. 6.5 – Lineare DGLen

$$y' + p(x)y = q(x) \;, \tag{2}$$

**heißt lineare Differentialgleichung (in Normalform).**

**Die Differentialgleichung (2) heißt homogen linear, falls $q(x) = 0$ ist, anderenfalls inhomogen linear.**

$$|y| = e^{C_0} e^{-P(x)} \quad \text{bzw.} \quad y = C\, e^{-P(x)} \;\; (C \in \mathbb{R},\; C \neq 0)$$

**ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, wobei $P(x)$ Stammfunktion von $p(x)$ ist, d.h. $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(\xi)\, d\xi$. Für $C = 0$ folgt $y(x) \equiv 0$.**

# Buch Kap. 6.5 – Lineare DGLen, Variation der Konstanten

**Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung wird angesetzt als**

$$y(x) = C(x)e^{-P(x)}.$$

**Einsetzen in die Gleichung (2) ergibt**

$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x)\ .$$

**Daraus folgt**

$$C'(x)e^{-P(x)} = q(x) \Longrightarrow C'(x) = q(x)e^{P(x)} \Longrightarrow C(x) = \int_{x_0}^{x} q(\xi)e^{P(\xi)}\,d\xi + C_1$$

**($C_1 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstante) und damit**

$$y(x) = C_1e^{-P(x)} + e^{-P(x)}\int_{x_0}^{x} q(\xi)e^{P(\xi)}\,d\xi =: y_{hom}(x) + y_{inh}(x)\ .$$

**$y(x) = y_{hom}(x) + y_{inh}(x)$ erfüllt für jedes $C_1 \in \mathbb{R}$ die inhomogene Gleichung.**

# Buch Kap. 6.5 – Lineare DGLen, Ansätze für $p \equiv$ const.

**Für**

$$y'(x) + py(x) = q(x)$$

**liefern die folgenden Ansätze partikuläre Lösugen:**

| Inhomogenität $q$ | Ansatz für $y_{inh}$ |
| --- | --- |
| $\sum_{k=1}^{m} a_k x^k$ | $\sum_{k=1}^{m} A_k x^k$ |
| $a_1 e^{ax}$ | $A_1 e^{ax}$ für $a \neq -p$ |
| $a_1 e^{ax}$ | $xA_1 e^{ax}$ für $a = -p$ |
| $a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ | $A\sin(\omega x - B)$ |

**Summen und Produkte der genannten Inhomogenitäten bedingen entsprechende Ansätze für $y_{inh}$.**