Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hinze

WiSe 2016/2017

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)

23. Februar 2017

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.
Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		

$\sum =$

Aufgabe 1: (3 + 7 Punkte)

Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie den stationären Punkt $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ des Systems $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y}(t)$ auf Stabilität.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y}(t) + e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung :

a) Berechnung der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$P(\lambda) := \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 1 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda) \cdot [(-2-\lambda)(-4-\lambda) - 3] = (-1-\lambda) \cdot \left[\lambda^2 + 6\lambda + 8 - 3\right] \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

$P(\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = -1 \vee (\lambda+3)^2 - 4 = 0$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind also:

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = -3 \pm 2\,.$$

Da die Realteile aller Eigenwerte negativ sind, ist der stationäre Punkt $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ asymptotisch stabil. **(1 Punkt)**

b) Nach a) hat die Systemmatrix die Eigenwerte $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1\,,\ \lambda_3 = -5\,.$

Berechnung der Eigenvektoren:

$\lambda_{1,2} = -1:$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 + 3v_3 \\ 0 \\ v_1 - 3v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Zeile und 3. Zeile $v_1 = 3v_3$. 2. Zeile: immer erfüllt.

Wir erhalten zwei linear unabhängige Eigenvektoren, zum Beispiel:

$$\boldsymbol{v}^{[1]} := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{v}^{[2]} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit den zugehörigen Lösungen:

$$\boldsymbol{y}^{[1]}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{y}^{[2]}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(3 Punkte)}$$

$\lambda_3 = -5$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 + 3v_3 \\ 4v_2 \\ v_1 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. und 3. Zeile $v_3 = -v_1$. 2. Zeile: $v_2 = 0$.

Zum Beispiel $\boldsymbol{v}^{[3]} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit $\boldsymbol{y}^{[3]}(t) = e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. **(1 Punkt)**

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist:

$$\boldsymbol{y}_h(t) = c_1\, \boldsymbol{y}^{[1]}(t) + c_2\, \boldsymbol{y}^{[2]}(t) + c_3\, \boldsymbol{y}^{[3]}(t).$$

Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe machen wir den Ansatz:

$$\boldsymbol{y}_p(t) = e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Einsetzen in das System ergibt:

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = -2e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}. \textbf{[1 Punkt]}$$

Oder

$$\begin{aligned} -2a &= -2a + 3c - 3 \Longrightarrow c = 1 \\ -2b &= -b - 2 \Longrightarrow b = 2 \\ -2c &= a - 4c - 1 \Longrightarrow -2 = a - 4 - 1 \Longrightarrow a = 3. \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

Die Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_h + \boldsymbol{y}_p. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$y'' - 4y' + 4y = (3+t)e^t \qquad \forall t > 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 4\,.$$

a) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe.

b) In welche algebraische Gleichung lässt sich die Anfangswertaufgabe durch die Laplace-Transformation überführen?

   Bitte belegen Sie Ihre Antwort durch Zwischenrechnungen.

Lösung zu 2:

a)

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda = 2\,.$$

Allg. Lösung der homogenen Aufgabe

$$y_h(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{2t} \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Der Ansatz $y_p(t) = (a + bt)e^t$ für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe liefert

$y_p'(t) = (a + bt)e^t + be^t, \qquad y''(t) = (a + bt)e^t + be^t + be^t\,.$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$(a + 2b + bt)\,e^t - 4(a + b + bt)e^t + 4(a + bt)e^t = (3 + t)e^t$$

$$\iff bt - 4bt + 4bt = t \wedge (a + 2b - 4a - 4b + 4a) = 3 \implies b = 1,\ a = 5 \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Damit erhalten wir als allg. Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{2t} + (5 + t)e^t$$

Es gilt $y'(t) = (c_2 + 2c_1 + 2c_2 t)e^{2t} + (1 + 5 + t)e^t$.

Die Anfangswerte liefern

$y(0) = c_1 + 5 = 2 \implies c_1 = -3\,.$

$y'(0) = (c_2 + 2c_1) + 6 = c_2 = 4 \implies c_2 = 4\,.$ **[2 Punkte]**

b) $y \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y, \qquad y' \circ\!\!-\!\!\bullet\, sY - y(0) = sY - 2,$

$y'' \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^2 Y - 2s - y'(0) = s^2 Y - 2s - 4$

$f(t) = (3 + t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2} = F(s)$ **[2 Punkte]**

Nach Verschiebungssatz gilt: $e^{at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s - a)$, also

$e^t f(t) = e^t(3 + t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{3}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} = F(s - 1)$ **[1 Punkt]**

Die AWA geht über in

$$s^2 Y - 2s - 4 - 4(sY - 2) + 4Y = (s^2 - 4s + 4)Y + 4 - 2s = \frac{3}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$