Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hinze

SoSe 2017

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)

1. September 2017

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.
Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		

$\sum =$

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Bestimmen Sie die vier stationären Punkte des folgenden Differentialgleichungssystems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

$$\begin{aligned} x' &= x\,(x - 1 - y) \\ y' &= y\,(2x - 3 - y). \end{aligned}$$

Lösung: Für Gleichgewichtspunkte muss

$$\begin{aligned} x' &= x\,(x - 1 - y) = 0 \\ y' &= y\,(2x - 3 - y) = 0 \end{aligned}$$

gelten.

Also $x = 0$ oder $y = x - 1$

und $y = 0$ oder $y = 2x - 3$. [**1 Punkt**]

Wir erhalten folgende Punkte

$P_1 = (0,0)^T$

$x = 0$ und $y = 2x - 3$, also $P_2 = (0,-3)^T$

$y = 0$ und $y = x - 1$, also $P_3 = (1,0)^T$

$y = x - 1$ und $y = 2x - 3 \Longrightarrow x - 1 = 2x - 3 \Longleftrightarrow x = 2,\ y = 1$.

Also $P_4 = (2,1)^T$. [**2 Punkte**]

Da das obige System nichtlinear ist, müssen wir für die Stabilitätsuntersuchung die Linearisierung der rechten Seite

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x\,(x - 1 - y) \\ y\,(2x - 3 - y). \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - x - xy \\ 2xy - 3y - y^2. \end{pmatrix}$$

in den Punkten P_1 bis P_4 betrachten. Es ist

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 1 - y & -x \\ 2y & -3 + 2x - 2y \end{pmatrix} \qquad \text{[\textbf{2 Punkte}]}$$

und damit

$JF(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerte -1 und -3.

P_1 ist asymptotisch stabil. [**1 Punkt**]

$JF(0,-3) = \begin{pmatrix} +2 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerte 2 und 3.

P_2 ist instabil. [**1 Punkt**]

$JF(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerte 1 und -1.

P_3 ist instabil. [**1 Punkt**]

$JF(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P(\lambda) = (2-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = 0!$

$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-7}{4}}$.

Da die Realteile beider Eigenwerte positiv sind, ist P_4 ebenfalls instabil. [**2 Punkte**]

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y''(t) + 2\,y'(t) + 2y\,(t) &= h(t) \qquad t \in]0,\pi[\\ y(0) + \alpha\, y\,(\pi) &= r_1 \\ y'(0) &= r_2 \qquad \alpha,\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y''(t) + 2\,y'(t) + 2y\,(t) = 0$$

b) Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[0,\pi]$ stetige Funktionen $h(t)$ eindeutig lösbar?

c) Bestimmen Sie die Lösung der Randwertaufgabe für

$$h(t) = 3 + t,\ \alpha = -1,\ r_1 = -\frac{\pi}{2},\ r_2 = 1\,.$$

Lösung zu 2:

a)
$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 + 1 = 0 \iff \lambda_{1,2} = -1 \pm i\,. \qquad \textbf{[1Punkt]}$$

Als reelles Fundamentalsystem wählen wir Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung

$e^{(-1+i)t} = e^{-t}(\cos(t) + i\sin(t))$

also

$y^{[1]}(t) = e^{-t}\cos(t)\,,\ y^{[2]}(t) = e^{-t}\sin(t)$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist:

$$y_h(t) = c_1 e^{-t}\cos(t) + c_2 e^{-t}\sin(t) \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

b) Es gilt $(y^{[1]})'(t) = e^{-t}(-\sin(t) - \cos(t))$ und $(y^{[2]})'(t) = e^{-t}(-\sin(t) + \cos(t))\,.$

$R_1(y^{[1]}) = y^{[1]}(0) + \alpha y^{[1]}(\pi) = 1 - \alpha\, e^{-\pi}\,,$

$R_1(y^{[2]}) = y^{[2]}(0) + \alpha y^{[2]}(\pi) = 0\,,$

$R_2(y^{[1]}) = (y^{[1]})'(0) = -1\,,$

$R_2(y^{[2]}) = (y^{[2]})'(0) = 1\,.$

Die RWA ist genau dann für alle $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und alle stetigen Funktionen h eindeutig lösbar, wenn die Martrix

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} R_1(y^{[1]}) & R_1(y^{[2]}) \\ R_2(y^{[1]}) & R_2(y^{[2]}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha\, e^{-\pi} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

regulär ist. Also genau dann, wenn

$$\det \mathbf{R} = 1 - \alpha\, e^{-\pi} \neq 0 \iff \alpha \neq e^{\pi}\,. \qquad \textbf{[3 Punkte]}$$

c) Einsatz des Ansatzes $y_p(t) = a + bt$ für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe in die Differentialgleichung liefert

$0 + 2 \cdot b + 2a + 2bt = 3 + t \iff 2b = 1,\ 2b + 2a = 3,$

Also $y_p(t) = 1 + \frac{t}{2}$. **[2 Punkte]**

Die Randwerte liefern eingesetzt in die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(t) + c_2 e^{-t} \sin(t) + 1 + \frac{t}{2}$$

$$R_1 : c_1 + 1 - (-c_1 e^{-\pi} + 1 + \frac{\pi}{2}) = c_1(1 + e^{-\pi}) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow c_1 = 0$$

und damit

$$R_2 : \quad c_2\, e^0(-\sin(0) + \cos(0)) + \frac{1}{2} = 1 \Longrightarrow c_2 = \frac{1}{2}. \quad \textbf{[2 Punkte]}$$