

Kapitel 4. Randwertaufgaben

4.4 Eigenwertaufgaben

Gegeben sei ein **homogenes lineares Randwertproblem** n -ter Ordnung

$$L[y] = y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t, \lambda)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t, \lambda)y(t) = 0$$

$$R_k[y] = \sum_{l=0}^{n-1} \left(\alpha_{k,l} y^{(l)}(a) + \beta_{k,l} y^{(l)}(b) \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Die Koeffizienten der Differentialgleichung und die Randbedingungen hängen von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} ab.

Ziel: Wir suchen nach **nichttrivialen** Lösungen des Problems.

Sei y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem von $L[y]$. Dann hängen die y_k auch von λ ab, d.h. $y_k = y_k(t, \lambda)$ und eine Lösung lässt sich als Linearkombination darstellen

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(t, \lambda)$$

4.4 Eigenwertaufgaben

Die Linearkombination

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(t, \lambda)$$

gesucht c_1, \dots, c_n

ist eine Lösung, falls die Randbedingungen

$$R_j[y] = \sum_{k=1}^n c_k R_j[y_k] = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

erfüllt sind. Dies ergibt für die Koeffizienten c_1, \dots, c_n ein **homogenes lineares Gleichungssystem** mit Systemmatrix

$$\mathbf{E}(\lambda) := \begin{pmatrix} R_1[y_1] & \dots & R_1[y_n] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_n[y_1] & \dots & R_n[y_n] \end{pmatrix} \quad E \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

Es existieren also **genau dann** nichttriviale Lösungen $y(t) \neq 0$, falls gilt

$$D(\lambda) := \det \mathbf{E}(\lambda) = 0$$

Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Definition: Die Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. \mathbb{C} mit $D(\lambda) = 0$ heißen **Eigenwerte** der Randwertaufgabe. Die zugehörigen nichttrivialen Lösungen nennt man die zugehörigen **Eigenfunktionen**. Diese sind höchstens bis auf skalare Vielfache eindeutig.

Bemerkung: Die Bedingung $D(\lambda) = 0$ ist im Allgemeinen ein nichtlineares Nullstellenproblem mit unendlich vielen Lösungen.

Eigenwertprobleme lassen sich in nichtlineare Randwertaufgaben transformieren. Wir setzen dazu $y_{n+1}(t) := \lambda$ und finden dann

$$y^{(n)}(t) = -a_{n-1}(t, y_{n+1})y^{(n-1)}(t) - \dots - a_0(t, y_{n+1})y(t)$$

$$y'_{n+1} = 0$$

$$R_k[y, y_{n+1}] = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n$$

$$y'(a) = 1 \quad (\text{Normierung})$$

Beispiel.

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

Die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung lautet:

$$y(t) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\lambda) = 0$$

Für die **Eigenwerte** ergibt sich demnach

$$\lambda_k = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

mit zugehörigen **Eigenfunktionen**

$$y_k(t) = \sin(\lambda_k t)$$

$$\lambda = 0$$

$$y(t) = a + bt$$

$$y(0) = a \stackrel{!}{=} 0$$

$$y(1) = b \stackrel{!}{=} 0$$

$$y = 0$$

keine Eigenfunktion

Beispiel.

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0$$

Die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung lautet:

$$y(t) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(1) - y'(1) = 0 \Rightarrow c_2 \left(\sin(\lambda) - \lambda \cos(\lambda) \right) = 0$$

Die **Eigenwerte** sind die Lösungen der nichtlinearen Gleichung $\lambda = \tan \lambda$ mit zugehörigen **Eigenfunktionen**

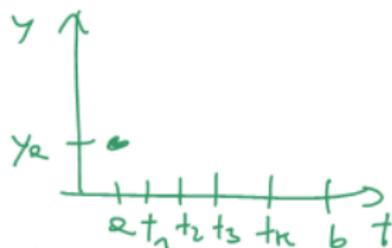
$$y_k(t) = \begin{cases} \sin(\lambda_k t) & : \lambda_k \neq 0 \\ t & : \lambda_k = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0 \quad y = a + bt$
 $y(0) = 0 \Rightarrow a = 0$
 $y(1) - y'(1) = b - b = 0 \checkmark$
 $y = bt$ Lsg.

5.1 Allgemeines

Gegeben sei die skalare Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_a \end{cases}$$



Wir wollen die Lösung $y(t)$ an einer Stelle $b > a$ berechnen.

Kann man die Lösung nicht explizit durch Integration bestimmen, so verwendet man ein **Diskretisierungsverfahren**. Wir definieren dazu eine Zerlegung des Integrationsintervalls

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

sowie die Näherungen

$$Y_j \approx y(t_j), \quad j = 0, \dots, m$$

Man nennt $h_j := t_{j+1} - t_j$ die **Schrittweite** des Diskretisierungsverfahrens.

Numerischer Integrator und Klassifikation.

Definition: Das Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung (Y_0, \dots, Y_m) bezeichnet man als **Numerischen Integrator**.

Numerische Verfahren lassen sich bestimmten Klassen zuordnen:

① **Einschrittverfahren**

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

Man nennt Φ die **Verfahrensfunktion**.

② **Mehrschrittverfahren**

$$Y_{j+1} = \Phi(Y_j, \dots, Y_{j-k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

Man verwendet die bereits berechneten Näherungen Y_j, \dots, Y_{j-k} .

③ **Extrapolationsverfahren**

Kombiniere ein Einschritt- bzw. Mehrschrittverfahren aus 1) und 2) mit verschiedenen Schrittweiten und extrapoliere das Ergebnis.

Wichtige Fragen zur Qualität eines Integrators.

- ❶ Es gelte $Y_j = y(t_j)$. Welchen Fehler machen wir im nächsten Integrationsschritt, d.h.

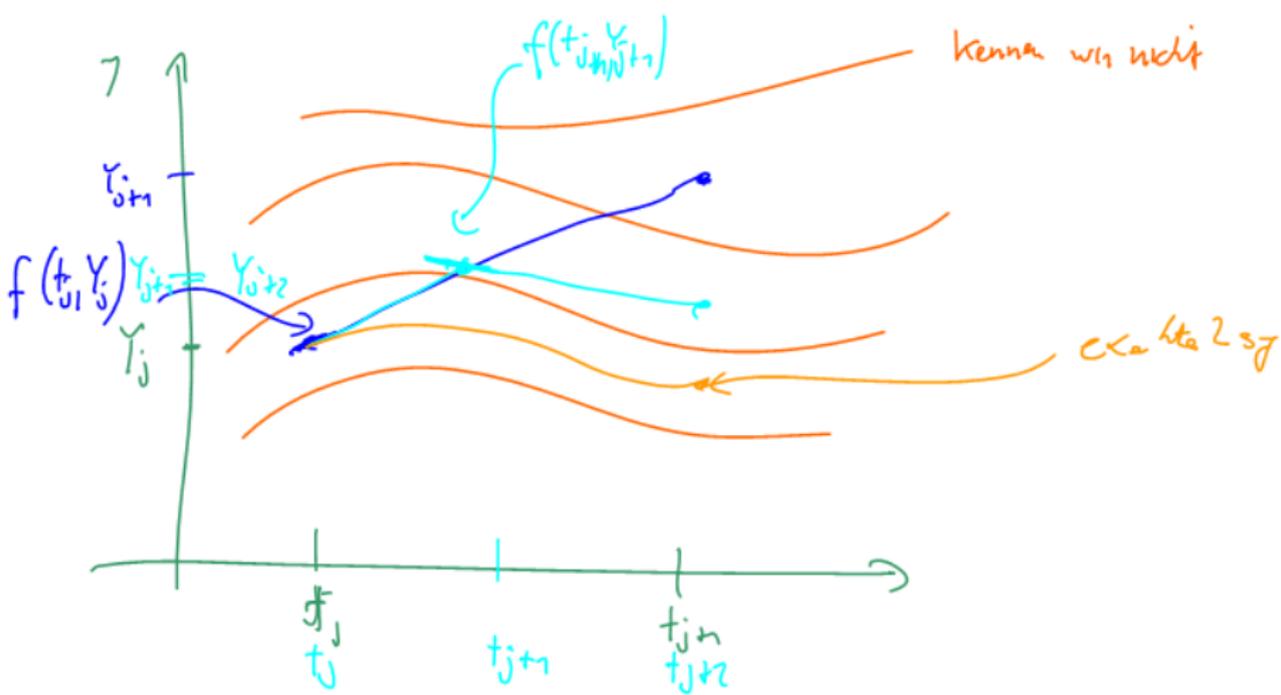
$$|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}| = ?$$

- ❷ Wenn wir die **lokalen** Fehler $|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}|$ kontrollieren können, was gilt dann zur Zeit $t = b$, d.h.

$$|y(b) - Y_m| = ?$$

Insbesondere, wenn wir $h_j \rightarrow 0$ wählen, d.h. **konvergiert** das Verfahren im Grenzfall $h_j \rightarrow 0$?

- ❸ Gibt es eine geeignete Wahl für die Schrittweite h_j , so dass der Approximationsfehler – etwa im Vergleich zum Rechenaufwand – minimal wird.



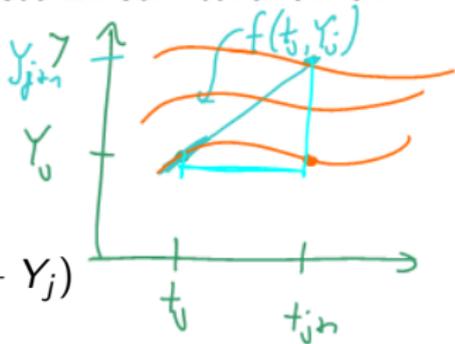
5.2 Einschrittverfahren

Das **Eulersche Polygonzugverfahren** ist das einfachste Einschrittverfahren und lautet

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j f(t_j, Y_j)$$

Das Verfahren entsteht aus der Approximation

$$y'(t_j) = f(t_j, Y_j) \approx \frac{1}{h_j} (Y_{j+1} - Y_j)$$



Geometrische Deutung:

Zur Berechnung des Wertes Y_j laufe ich immer ein kurzes Stück in Richtung der Tangente im Punkt Y_j , d.h. entlang der Geraden mit Steigung $f(t_j, Y_j)$.

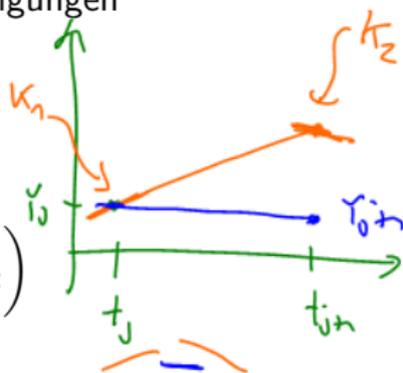
Zwei weitere Einschrittverfahren.

Verfahren von Heun: Wähle den Mittelwert zweier Steigungen

$$K_1 := f(t_j, Y_j)$$

$$K_2 := f(t_j + h_j, Y_j + h_j K_1)$$

$$Y_{j+1} := Y_j + h_j \left(\frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 \right)$$



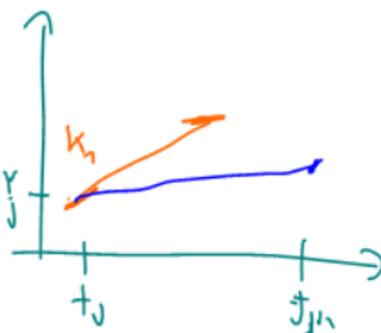
Das modifizierte Euler-Verfahren: (Lothar Collatz, Hamburg, 1960)

Wähle eine mittlere Steigung

$$K_1 := f(t_j, Y_j)$$

$$K_2 := f\left(t_j + \frac{h_j}{2}, Y_j + \frac{h_j}{2} K_1\right)$$

$$Y_{j+1} := Y_j + h_j K_2$$



Der lokale Diskretisierungsfehler.

Definition: Gegeben sei die Näherung (t_j, Y_j) und ein Einschrittverfahren in der Form

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

Sei $z(t)$ die Lösung des (lokalen) Anfangswertproblems

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad z(t_j) = Y_j$$

a) Das **exakte Inkrement** ist gegeben durch

$$\Delta(t_j, Y_j, h) := \frac{z(t_j + h) - Y_j}{h}$$

b) Man nennt dann

$$\tau(t_j, Y_j, h) := \Delta(t_j, Y_j, h) - \Phi(t_j, Y_j, h)$$

den **lokalen Diskretisierungsfehler**.

Konsistente Verfahren und Verfahrensordnung.

Definition: (Fortsetzung)

- c) Das Einschrittverfahren heißt **konsistent**, falls für alle hinreichen oft stetig differenzierbaren rechten Seiten $f(t, y)$ gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t_j, Y_j, h) = 0$$

Das Einschrittverfahren besitzt die **Ordnung** p , falls gilt:

$$\tau(t_j, Y_j, h) = O(h^p)$$

d.h.

$$\exists C, h_0 > 0 : \forall h \in (0, h_0] : |\tau(t_j, Y_j, h)| \leq Ch^p$$

Bemerkung: Man kann den lokalen Diskretisierungsfehler auch als

$$\tau(t_j, Y_j, h) = \frac{1}{h} \left(z(t_{j+1}) - Y_{j+1} \right)$$

darstellen, d.h. τ ist der Integrationsfehler pro Schrittweite.

Berechnung der Konsistenzordnung.

Man verwendet dazu die **Taylor-Entwicklung** von $z(t+h)$ um $h=0$:

$$z(t+h) = z(t) + z'(t)h + z''(t)\frac{h^2}{2} + \dots$$

Nun gilt neben $z(t) = Y$

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

$$z''(t) = f_t(t, z) + f_y(t, z)z' = f_t(t, z) + f_y(t, z)f(t, z)$$

$$z^{(3)}(t) = f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 d$$

Wir erhalten daher für $\Delta(t, y, h) = (z(t+h) - Y)/h$ den Ausdruck

$$\Delta = f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + \frac{h^2}{6}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 d) + O(h^3),$$

wobei die rechte Seite an der Stelle $(t, z(t)) = (t, Y)$ ausgewertet wird.

Beispiele.

- ① Beim Euler-Verfahren gilt $\Phi = f(t, Y)$ und daher

$$\tau = \Delta - \Phi = f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + O(h^2) - \Phi = \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + O(h^2)$$

Das Verfahren ist also **konsistent erster Ordnung**.

- ② Beim Verfahren von Heun gilt

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2} (f(t, Y) + f(t+h, Y + hf(t, Y))) \\ &= \frac{1}{2} \left(f(t, Y) + f(t, Y) + \frac{h}{2} (f_t(t, Y) + f_y(t, Y)f(t, Y)) + O(h^2) \right) \\ &= f + \frac{h}{2} (f_t + f_y f)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\tau = \Delta - \Phi = O(h^2)$$

Das Heun-Verfahren ist ein **konsistentes Verfahren zweiter Ordnung**.

3) Collatz $p=2$ $\phi = f(t + \frac{h}{2}, Y + \frac{h}{2}f) =$

sol collect

$$\phi = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f\right) = f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + O(h^2)$$

$$\tau = \Delta - \phi = O(h^2)$$

Konvergenzsatz.

Satz: Die exakte Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_a$$

existiere im Intervall $[a, b]$. Das Einschrittverfahren der Form

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

sei konsistent und besitze die Ordnung p mit $|\tau(t, Y, h)| \leq Ch^p$.

Ferner sei die Verfahrensfunktion Φ Lipschitz-stetig bezüglich Y :

$$|\Phi(t, \tilde{Y}, h) - \Phi(t, Y, h)| \leq L|\tilde{Y} - Y|$$

Dann gilt für die mit äquidistanter Schrittweite $h = (b - a)/m$, $m \in \mathbb{N}$, berechneten Näherungen $Y_m = Y(b; h)$ von $y(b)$:

$$|Y(b; h) - y(b)| \leq \frac{1}{L} \left(e^{L(b-a)} - 1 \right) Ch^p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Konvergenz !!!

Runge–Kutta–Verfahren.

Die allgemeine Form eines Runge–Kutta Verfahrens mit **Stufenzahl** s lautet

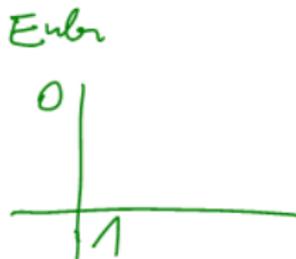
$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^s c_i K_i(t_j, Y_j, h_j)$$

$$K_1(t, Y, h) = f(t, Y)$$

$$K_i(t, Y, h) = f\left(t + a_i h, Y + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l\right)$$

Schreibweise als **Butcher–Schema**

0						
a_2	b_{21}					
a_3	b_{31}	b_{32}				
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots			
a_s	b_{s1}	b_{s2}	\dots	$b_{s,s-1}$		
	c_1	c_2	\dots	c_{s-1}	c_s	



Beispiele.

- Das **Verfahren von Heun** ($p = 2$) als Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

- Das **modifizierte Euler-Verfahren** ($p = 2$) als Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Weitere Beispiele

- Die **Kutta-Regel** ($p = 3$)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

- Das **klassische Runge-Kutta-Verfahren** ($p = 4$)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$