Die erste Variation δI.

Definition: Der Ausdruck δI definiert durch

$$\delta I := \frac{d}{d\varepsilon} I[y_0 + \varepsilon h]\Big|_{\varepsilon=0}$$

heißt die 1. Variation des Funktionals $I[y]$.

Damit man eine Lösung des Variationsproblem erhält, muss $\delta I = 0$ gelten.

Bemerkung:

- Die Funktion

  $$\delta y(t) := \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\, y(t,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = h(t)$$

  nennt man auch die 1. Variation der abhängigen Variablen.

- Die erste Variation δI entspricht der Richtungsableitung von $I[y]$ in Richtung h an der Stelle y_0.

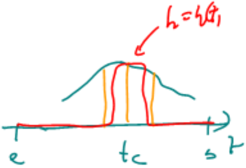
Berechnung der ersten Variation

Die 1. Variation berechnet man wie folgt.

$$\begin{aligned}
\delta I &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(t, y_0 + \varepsilon h, y_0' + \varepsilon h')dt \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') \cdot h(t) + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h'(t)}_{\text{Partielle Integration}} \right) dt \\
&= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t)dt + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h(t)\Big|_a^b}_{=0} \\
&= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t)dt
\end{aligned}$$

$$\int_a^b \Big(\qquad\qquad \Big) \cdot h(t)\,dt = 0 \qquad \forall h \text{ mit } h(a) = h(b) = 0$$

Beh. $\Rightarrow \Big(\qquad \Big) = 0$



<u>Beweis:</u> Annahme $\Big(\qquad \Big)(t_c) \neq 0$ um t_c

$\Big(\qquad \Big)$ stetig, $\exists$ Umgebung $\Big(\qquad \Big) \neq 0$

weg von Null

$\Rightarrow \Big(\quad \Big) \cdot h(t) \geq 0 \qquad \int \big(\quad \big) \cdot h(t) > 0 \quad \lightning$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung.

Wir erhalten also aus Bedingung $\delta I = 0$:

$$\int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t) dt \stackrel{!}{=} 0$$

Da $h(t)$ beliebig ist, folgt das Fundamentallemma der Variationsrechnung

$$f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') = 0 \qquad \text{für } a \leq t \leq b$$

Satz: Jede Lösung der oben definierten Variationsaufgabe ist zugleich eine Lösung der Randwertaufgabe

$$f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \quad = \quad 0$$

$$y_0(a) = y_a \qquad y_0(b) = y_b$$

Die Differentialgleichung nennt man die Euler–Lagrange–Gleichung.

Explizite Form der Euler–Lagrange–Gleichung.

Wegen

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') = f_{y't}(t, y_0, y_0') + f_{y'y}(t, y_0, y_0') \cdot y_0' + \underbrace{f_{y'y'}(t, y_0, y_0')}_{\neq 0} \cdot y_0''$$

läßt sich die Euler–Lagrange Gleichung unter der Regularitätsbedingung

$$f_{y'y'}(t, y_0, y_0') \neq 0$$

nach y_0'' auflösen und damit in der expliziten Form

$$y_0'' = \frac{f_y(t, y_0, y_0') - f_{y't}(t, y_0, y_0') - f_{y'y}(t, y_0, y_0') \cdot y_0'}{f_{y'y'}(t, y_0, y_0')}$$

schreiben.

Bemerkung: Die Gleichung läßt sich in zwei Spezialfällen vereinfachen:

- die Funktion f ist unabhängig von y, d.h. $f = f(t, y')$,
- die Funktion f hängt nicht explizit von t ab, d.h. $f = f(y, y')$.

Zwei Spezialfälle der Euler–Lagrange Gleichung

1. Hängt f nicht von y ab, $f = f(t, y')$ so lautet die Euler–Lagrange Gleichung

$$\cancel{f_y(t, y_0, y_0')} = \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') = 0.$$

   Dies bedeutet aber für alle $a \leq t \leq b$ Dgl 1. Ordnung !?

$$f_{y'}(t, y_0, y_0') = \text{const.}$$

2. Hängt f nicht explizit von t ab, so gilt für alle $a \leq t \leq b$

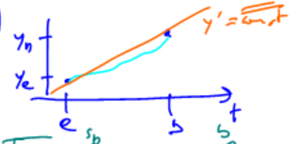
   Behauptung $\quad H := f - f_{y'} y' = \text{const.}$ $\quad$ 1. Ordnung !?

   denn

   $f(y(t), y'(t))$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t) &= \frac{d}{dt}(f - f_{y'} y') = f_y y' + \cancel{f_{y'} y''} - \left(\frac{d}{dt} f_{y'}\right) y' - \cancel{f_{y'} y''} \\ &= \underbrace{\left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'}\right)}_{=0} y' = 0 \end{aligned}$$

a)



$y = y(t)$

$$ds = \sqrt{dt^2 + dy^2} = \sqrt{dt^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt^2} = \sqrt{1+y'^2}\, dt$$

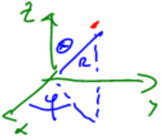
$$\boxed{S = \int_{s_a}^{s_b} ds = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dt \longrightarrow \min \qquad y(a) = y_a\,,\ y(b) = y_b}$$

$$f = f(y')$$

·) f unabh. von y $\Rightarrow$ $f_{y'} = \text{const}$, $\quad \frac{d}{dy'}\sqrt{1+y'^2} = \frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$

$$\Rightarrow \quad y'^2 = \text{const}^2 (1+y'^2) \quad \Rightarrow \quad y'^2 = \text{const}\,, \quad y' = \text{const}$$

b)



$A = \left(r, \varphi_a, \frac{\pi}{2}\right)$

$B = \left(r, \varphi_b, \frac{\pi}{2}\right)$

φ, $\theta = \theta(\varphi)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \\ z(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\theta(\varphi) \cos\varphi \\ r \cos\theta(\varphi) \sin\varphi \\ r \sin\theta(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$ds = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,d\varphi =$$

$$= \sqrt{(R\sin\theta\,\theta'\cos\varphi + R\cos\theta\sin\varphi)^2 + (R\sin\theta\,\theta'\sin\varphi + R\cos\theta\cos\varphi)^2 + (R\cos\theta\,\theta')^2} =$$

$$= R\sqrt{\underbrace{\theta'^2\underbrace{(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi)}_{\sin^2\theta} + \theta'\cdot 0 + \underbrace{(\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi)}_{\cos^2\theta} + \cos^2\theta\,\theta'^2}_{\theta'^2}}$$

$$= R\sqrt{\theta'^2+\cos^2\theta} = f(\theta,\theta')$$

$$S = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f(\theta,\theta')\,d\varphi \longrightarrow \min \qquad \theta(\varphi_a) = \theta(\varphi_b) = \frac{\pi}{2}$$

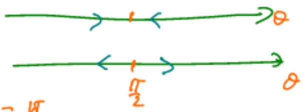
f unabh. von t $\Rightarrow$ $\text{const} = H = f - f_{\theta'}\cdot\theta' = R\sqrt{} - R\dfrac{\cancel{2}\theta'\theta'}{\cancel{2}\sqrt{}} =$

$$= R\,\frac{\cancel{\theta'^2} + \cos^2\theta - \cancel{\theta'^2}}{\sqrt{\theta'^2+\cos^2\theta}}$$

$$\theta'^2 = \cos^2\theta\left(\frac{1}{\text{const}^2} - 1\right) \Longrightarrow \theta' = C\cos\theta \qquad \theta(\varphi_a) = \theta(\varphi_b) = \frac{\pi}{2}$$

$C > 0$

$C < 0$



$C = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$

Fortsetzung des Beispiels.

Für die Hamilton–Funktion gilt

$$H = \sqrt{\frac{1+(y'(t))^2}{y_a - y(t)}} - \sqrt{\frac{y_a - y(t)}{1+(y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a - y(t)} \cdot y'(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(y'(t))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y_a - y(t)}} = c_1 = \text{const.}$$

Daraus erhalten wir die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{\frac{2c - (y_a - y)}{y_a - y}} \qquad \text{mit } 2c = \frac{1}{c_1^2} > 0$$

Eine Trennung der Variablen ergibt dann die implizite Darstellung

$$\int_{y_a}^{y} \sqrt{\frac{y_a - \eta}{2c - (y_a - \eta)}} d\eta = t - a,$$

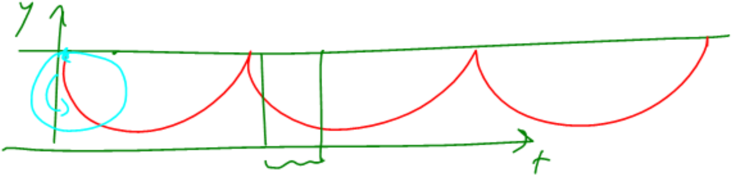
eine Zykloide (siehe Band 1, Beispiel 14.2.2).

$$t-a=\int_{y_e}^{y}\sqrt{\frac{y_e-\eta}{2c-(y_e-\eta)}}\,d\eta \;\overset{z=y_e-\eta}{=\!=}\; \int_{y_e-y}^{0}\sqrt{\frac{z}{2c-z}}\,dz=$$

$$=c\arccos\left(\frac{c-z}{z}\right)-\sqrt{z(2c-z)}=\sqrt{(y_e-y)(2c-(y_e-y))}-c\arccos\left(\frac{c-(y_e-y)}{y_e-y}\right)$$

$$a-t=c(s-\sin s)$$
$$y_e-y=c(1-\cos s)$$

$$\begin{pmatrix} t\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\\ y_e\end{pmatrix}-c\begin{pmatrix} s\\ 1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}\sin s\\ \cos s\end{pmatrix}$$



+RB $\Rightarrow$ Brachistochrone

4.3 Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung

Wir betrachten eine lineare Randwertaufgabe zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} L[y] &:= y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = h(t) \\ R_1[y] &:= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y'(b) = d_1 \\ R_2[y] &:= \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) + \gamma_2 y(b) + \delta_2 y'(b) = d_2 \end{aligned}$$

Damit das oben stehende System eine Lösung hat, nehmen wir an, dass die zugehörige homogene Randwertaufgabe

$$L[y] = 0, \qquad R_1[y] = R_2[y] = 0$$

nur die triviale Lösung besitzt.

Beobachtung: Das Problem läßt sich stets auf ein Problem mit homogenen Randbedingungen zurückführen.

Rückführung auf homogene Randbedingungen.

Sei $y_0(t)$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion mit

$$R_1[y_0] = d_1 \quad \text{und} \quad R_2[y_0] = d_2$$

d.h. $y_0(t)$ erfüllt die gegebenen Randbedingungen.

Wir setzen dann

$$z(t) := y(t) - y_0(t)$$

Folgerung:

Löst $y(t)$ das Problem

$$L[y] = h(t), \qquad R_1[y] = d_1, \qquad R_2[y] = d_2,$$

so löst $z(t)$ das homogene Randwertproblem

inh. homog.

$$L[z] = \tilde{h}(t) := h(t) - L[y_0](t), \qquad R_1[z] = 0, \qquad R_2[z] = 0$$

Die Greensche Funktion bei Randwertaufgaben.

1. Randwertaufgaben 2. Ordnung mit homogenen Randbedingungen lassen sich stets mit Hilfe der Greenschen Funktion lösen.

2. Dabei erhält man die Lösungsdarstellung

$$y(t) = \int_a^b G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau$$

   mit der Greensche Funktion $G(t,\tau)$ und $a \leq t,\tau \leq b$.

3. Entscheidender Vorteil: Die Greensche Funktion hängt nur vom Differentialoperator $L[y]$ ab, aber **nicht** von der Inhomogenität $h(t)$.

4. Ist die Greensche Funktion für den Differentialoperator $L[y]$ bestimmt, so lassen sich die Lösungen mit beliebiger Inhomogenität in der obigen Form darstellen.

Wir nehmen an, dass $G(t,\tau)$ auf den beiden Mengen

$$D_1 := \{(t,\tau) \mid a \le \tau \le t \le b\} \quad \text{und} \quad D_2 := \{(t,\tau) \mid a \le t \le \tau \le b\}$$

glatt ist, d.h. sich als eine $\mathcal{C}^2$–Funktion auf den Rand fortsetzen lässt, dass jedoch $G(t,\tau)$ für $t=\tau$ Sprünge haben können.

$$y(t) = \int_a^b G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau$$

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left\{\int_a^t G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau + \int_t^b G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau\right\}$$

$$= \int_a^b G_t(t,\tau)h(\tau)\,d\tau + \left[G(t,t^-) - G(t,t^+)\right]\,h(t)$$

Fortsetzung der Konstruktion der Greenschen Funktion.

Wir verlangen nun

$$G(t, t^-) - G(t, t^+) = 0$$

das heißt $G(t, \tau)$ ist stetig für $t = \tau$.

Für die zweite Ableitung gilt dann

$$y''(t) = \int_a^b G_{tt}(t, \tau) h(\tau)\, d\tau + \left[G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+) \right] \, h(t)$$

und daher

$$L[y](t) = \int_a^b L[G(\cdot, \tau)](t) h(\tau)\, d\tau + \left[G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+) \right] \, h(t)$$

Wir fordern daher für die Greensche Funktion $G(t, \tau)$

$$L[G(\cdot, \tau)] = 0 \qquad \text{und} \qquad G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+) = 1$$

Lösungsdarstellung mit Hilfe der Greenschen Funktion.

Satz: Sei $G(t,\tau)$ eine Funktion $G(t,\tau)$, die die folgenden drei Eigenschaften erfüllt.

1. Die Funktion $G(t,\tau)$ ist stetig auf $[a,b]^2$ und lässt sich auf D_1 und D_2 als $\mathcal{C}^2$–Funktion fortsetzen.

2. Die Funktion $G(t,\tau)$ erfüllt bei festem τ die homogene Differentialgleichung $L[G(\cdot,\tau)] = 0$ für $t \in [a,\tau]$ und $t \in [\tau,b]$ sowie die Randbedingungen
$$R_k[G(\cdot,\tau)] = 0, \qquad \text{für } k = 1,2.$$

3. Die Funktion $G(t,\tau)$ erfüllt die Bedingung
$$G_t(t,t^-) - G_t(t,t^+) = 1.$$

Dann ist die Lösung $y(t)$ des Randwertproblems gegeben durch

$$y(t) = \int_a^b G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau$$

Verfahren zur Konstruktion einer Greenschen Funktion.

1. Ist $y_1(t), y_2(t)$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, so machen wir den Ansatz

gesucht a_1, a_2, b_1, b_2

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (a_1(t) + b_1(t))y_1(t) + (a_2(t) + b_2(t))y_2(t) & : \quad \tau \le t \\ (a_1(t) - b_1(t))y_1(t) + (a_2(t) - b_2(t))y_2(t) & : \quad \tau \ge t \end{cases}$$

2. Die Stetigkeit und Sprungbedingung an $G(t,\tau)$ liefert dann

$G(t,t-) - G(t,t+) = 0$

$G_t(t,t-) - G_t(t,t+) = 0$

$$\begin{aligned} 2\big(b_1(t)y_1(t) + b_2(t)y_2(t)\big) &= 0 \\ b_1(t)y_1'(t) + b_2(t)y_2'(t) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{Y(t)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für $b_1(t)$ und $b_2(t)$ mit regulärer Koeffizientenmatrix.

3. Die Randbedingungen ergeben schließlich ein lineares Gleichungssystem für die beiden Größen $a_1(t)$ und $a_2(t)$, das ebenfalls eindeutig lösbar ist.

Ein Beispiel zur Greenschen Funktion.

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= h(t) \\ y(0) - y(\pi) &= 0 \\ y'(0) - y'(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem ist $y_1(t) = \cos t$ und $y_2(t) = \sin t$.

Unser Ansatz für die Greensche Funktion lautet daher

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (a_1(\tau) + b_1(\tau))\cos t + (a_2(\tau) + b_2(\tau))\sin t & : \quad \tau \le t \\ (a_1(\tau) - b_1(\tau))\cos t + (a_2(\tau) - b_2(\tau))\sin t & : \quad \tau \ge t \end{cases}$$

Die Koeffizienten $b_1(t)$ und $b_2(t)$ lösen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_1(t)\cos t + b_2(t)\sin t &= 0 \\ -b_1(t)\sin t + b_2(t)\cos t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_1(t)\cos t + b_2(t)\sin t &= 0 \\ -b_1(t)\sin t + b_2(t)\cos t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

kann wie folgt aufgelöst werden:

Multipliziere die erste Gleichung mit $\sin t$ sowie die zweite Gleichung mit $\cos t$ und addiere. Wir erhalten damit

$$(\sin^2 t + \cos^2 t) b_2(t) = \frac{1}{2}\cos t$$

und daraus folgt

$$\boxed{b_2(t) = \frac{1}{2}\cos t}$$

Durch Einsetzen dieser Lösung ergibt sich $b_1(t)$ als

$$\boxed{b_1(t) = -\frac{1}{2}\sin t}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Wir setzen nun $G(t,\tau)$ in die vorgegebenen Randbedingungen ein:

Man berechnet

$$
\begin{aligned}
G(0,\tau) &= (a_1(\tau) \cancel{+} b_1(\tau)) \cos t|_{t=0} + (a_2(\tau) \cancel{+} b_2(\tau)) \sin t|_{t=0} \\
&= a_1(\tau) \cancel{+} b_1(\tau) \\
G(\pi,\tau) &= (a_1(\tau) + b_1(\tau)) \cos t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \sin t|_{t=\pi} \\
&= -\Big(a_1(\tau) + b_1(\tau)\Big) \\
G_t(0,\tau) &= -(a_1(\tau) \cancel{+} b_1(\tau)) \sin t|_{t=0} + (a_2(\tau) \cancel{+} b_2(\tau)) \cos t|_{t=0} \\
&= a_2(\tau) \cancel{+} b_2(\tau) \\
G_t(\pi,\tau) &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \sin t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \cos t|_{t=\pi} \\
&= -\Big(a_2(\tau) + b_2(\tau)\Big)
\end{aligned}
$$

Komplettierung des Beispiels.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} G(0,\tau) - G(\pi,\tau) &= \Big(a_1(\tau) - b_1(\tau)\Big) + \Big(a_1(\tau) + b_1(\tau)\Big) \stackrel{!}{=} 0 \\ G_t(0,\tau) - G_t(\pi,\tau) &= \Big(a_2(\tau) - b_2(\tau)\Big) + \Big(a_2(\tau) + b_2(\tau)\Big) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt aber $a_1(\tau) = a_2(\tau) = 0$ und die Greensche Funktion lautet

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(t-\tau) & : \quad \tau \le t \\ -\frac{1}{2}\sin(t-\tau) & : \quad \tau \ge t \end{cases}$$

Die Lösung der Randwertaufgabe ist dann gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t-\tau)h(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int_t^\pi \sin(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

Beachte: Die Lösungformel gilt für beliebige Inhomogenitäten $h(t)$.