$$z' = -z + 2e^t$$

$$z(t) = c e^{-t} + e^t$$

spezielle Lsg $\quad z(t) = e^t$

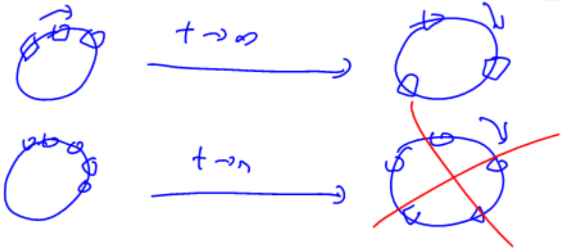
$$y = z - e^t$$

$$\boxed{y' = z' - e^t = -z + 2e^t - e^t = -z + e^t = -y}$$

$A = -1$

$y = 0$ ist asymptotisch stabil

$\Rightarrow$ $z = e^t$ asymptotisch stabile explodierende Lsg



$$\boxed{\begin{aligned} \dot y_j &= z_j \\ \dot z_j &= -\left[z_j + V(y_{j+1}) - V(y_j)\right] \end{aligned}} \qquad j = 1,\dots,N$$

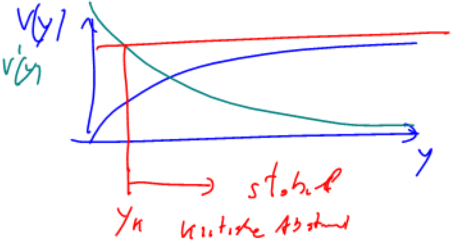
$$\begin{pmatrix} y_j \\ z_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall j = 1,\dots,N$$

$$(Y_j, z_j) = \left(y_j - \frac{1}{N}, z_j\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot Y_j &= z_j \\ \dot z_j &= -\left[z_j + V\left(\tfrac{1}{N} + Y_{j+1}\right) - V\left(\tfrac{1}{N} + Y_j\right)\right] \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \dot Y_j &= z_j \\ \dot z_j &= -\left[z_j + \cancel{V\left(\tfrac{1}{N}\right)} + \underbrace{V'\left(\tfrac{1}{N}\right)}_{\beta} Y_{j+1} - \cancel{V\left(\tfrac{1}{N}\right)} - V'\left(\tfrac{1}{N}\right) Y_j\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot Y_j &= z_j \\ \dot z_j &= -z_j + \beta\left(Y_{j+1} - Y_j\right) \end{aligned}} \qquad j = 1,\dots,N$$



$$\beta = V'\left(\frac{1}{N}\right)$$

4.1 Allgemeines

Wir betrachten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \qquad \text{mit } \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei sei $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hinreichend oft stetig differenzierbar.

Anfangswertaufgabe: Gebe Lösung zur Zeit $t = a$ vor

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0$$

Randwertaufgabe: Zur Festlegung einer Lösung $\mathbf{y}(t)$ werden nicht alle Komponenten y_i an einer Stelle vorgegeben wie oben, sondern

gewisse Komponenten y_i an verschiedenen Stellen $t = a, b, c, \ldots$

Typische Beispiele zu Randwertaufgaben.

1. Sturmsche Randwertaufgaben

$$\begin{cases} y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) &= h(t) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= d_1 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= d_2 \end{cases}$$

2. Lineare Randwertaufgaben

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) &= \mathbf{d} \end{cases}$$

3. Allgemeine Zweipunkt–Randwertaufgaben

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) &= 0 \end{cases}$$

$y'' + y = 0$

i) $y(t) = a\cos t + b\sin t$

ii) Ansatz $y = e^{\lambda t}$ $\quad \lambda^2 + 1 = 0$; $\lambda_{1/2} = \pm i$; $e^{it}, e^{-it}, \cos t, \sin t,$

iii) $y' = z$
$z' = -y$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_{1/2} = \pm i \qquad e_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

$$e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ i\cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Randwerte entscheiden über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Beispiel: Wir betrachten die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben durch

$$y'' + y = 0.$$

$y(t) = a \sin t + b \cos t$

1. Die Randwerte

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$b = 0$
$a = 1$

ergeben die eindeutig bestimmte Lösung $y(t) = \sin t$.

2. Keine Lösung existiert für die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 1$$

$b = 0$
$\sin \pi = 0$

3. Für die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

gibt es unendlich viele Lösungen $y(t) = c \sin t$ mit einem beliebigen $c \in \mathbb{R}$.

Existenzsatz für lineare Randwertaufgaben.

Satz: Gegeben sei die lineare Randwertaufgabe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) & = & \mathbf{d} \end{array} \right.$$

mit stetigen Funktionen $\mathbf{A}(t), \mathbf{h}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $\mathbf{Y}(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem zu $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) Die Randwertaufgabe ist für alle stetigen Inhomogenitäten $\mathbf{h}(t)$ und Randwerte $\mathbf{d}$ stets eindeutig lösbar.

2) Die zugehörige Randwertaufgabe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \cancel{+ \mathbf{h}(t)} \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) & = & \mathbf{0} \end{array} \right.$$

$y(t) = Y(t)\, c$

$= B_a Y(a)\, c + B_b Y(b)\, c =$

$= (B_a Y(a) + B_b Y(b)) \cdot c = 0$

hat nur die triviale Lösung $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$.

3) Die Matrix

$$\mathbf{E} := \mathbf{B}_a\mathbf{Y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{Y}(b) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ist regulär.

Wir schreiben die Gleichung zweiter Ordnung zunächst als ein System und bestimmen anschließend das zugehörige Fundamentalsystem:

$y'' + y = 0$

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

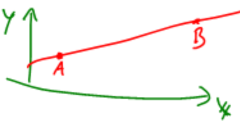
Damit folgt: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(b) \\ z(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_b \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{B}_a \mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Matrix **E** ist demnach regulär für $b = \pi/2$ und singulär für $b = \pi$.

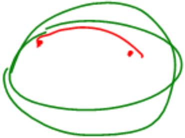
Variationsaufgabe:

a)



kürzeste Verb.

b)

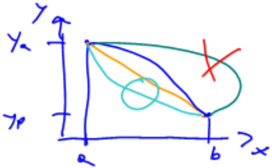


–||–

c) $y = y_a$ $\quad E = mgy_a$

y $\quad E = mgy + \frac{mv^2}{2} = mgy_b$

$v^2 = 2g(y_b - y)$



$x = x(t)$

$y = y(x(t))$ $\quad v^2 = |v|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + (y'\dot{x})^2 =$

$= (1 + y'^2)\dot{x}^2$

$\sqrt{2g}\sqrt{(y_b - y)} = \sqrt{(1 + y'^2)}\,\frac{dx}{dt}$ $\qquad dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g\,(y_b - y)}}\,dx$

$$T = \int_{t_a}^{t_b} dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_b - y}}\, dx \longrightarrow \text{Min}$$

$y(a) = y_a$

$y(b) = y_b$

4.2 Grundbegriffe der Variationsrechnung

Problem der Brachistochrone (Johann Bernoulli, 1696):

Man bestimme eine differenzierbare Funktion $y = y(t)$ mit Randbedingungen $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, sodass das Integral

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(t)}}\, dt$$

minimal wird.

Interpretation: Das angegebene Funktional $I[y]$ beschreibt – bis auf einen Vorfaktor – die Zeit, die ein Massenpunkt benötigt, um unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang der Kurve $y = y(t)$ von Punkt $A = (a, y_a)$ zum Punkt $B = (b, y_b)$ zu kommen.

Allgemeine Formulierung einer Variationsaufgabe.

Gesucht ist eine differenzierbare Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, die die vorgebenenen Randbedingungen

$$y(a) = y_a \qquad y(b) = y_b$$

erfüllt und gleichzeitig ein Funktional der Form

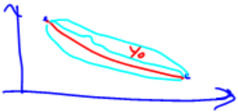
$$I[y] = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt$$

minimiert.

Ziel: Wir suchen eine Randwertaufgabe, die zu der oben formulierten Variationsaufgabe äquivalent ist.

Zur Lösung des Variationsproblems (Lagrange, 1755).

Sei $y_0(t)$ die Lösung des allgemeinen Variationsproblems und $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion mit



$$h(a) = h(b) = 0$$

Setzen wir $y(t, \varepsilon)$ als

$$y(t, \varepsilon) := y_0(t) + \varepsilon h(t),$$

so besitzt die Funktion

$$J(\varepsilon) := I[\, y(\cdot, \varepsilon) \,] = I[\, y_0 + \varepsilon h \,]$$

im Punkt $\varepsilon = 0$ ein Minimum, denn $y_0(t)$ löst das allgemeine Variationsproblem.

Da $J(\varepsilon)$ eine skalare Funktion der reellen Variablen ε ist, gilt als notwendige Bedingung für einen (lokalen) Extremwert (nach Analysis I)

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = 0$$