$y' = Ay$ linear !

Kenntnis der $\operatorname{Re} \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$ klärt die Stabilitätssituation

von $y = 0$

$y' = f(y)$ $f(0) = 0$ nicht linear !

mehrere Methoden

[i) explizite Lsg]

ii) aber Linearisierung (Stabilitätssatz III) nur Teilaussagen

iii) Ljapunov

Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen.

Wir betrachten das nichtlineare **autonome** System

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \quad = \underbrace{\cancel{f(0)}}_{=0} + \underbrace{Jf(0)}_{A}\, y + g(y)$$

wobei $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gelte, d.h. $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

Stabilitätsuntersuchung mittels Linearisierung der rechten Seite

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{A} &= \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{y}) &= \mathbf{o}(\|\mathbf{y}\|) \quad \text{mit } \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

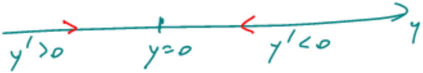
$$\lim_{y \to 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0$$

Folgt aus Taylor–Entwicklung der rechten Seite um den Entwicklungspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0})\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

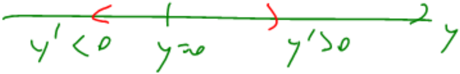
i) $y' = -y|y|$ $\lambda = 0$ $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$

$A = Jf(0) = 0$ Nullbg. stabil



ii) $y' = +y|y|$ $\lambda_1 = 0$ $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$

$A = 0$ Nullbg. instabil



Stabilitätssatz III für nichtlineare Gleichungen.

Satz: (Stabilitätssatz III) Mit den obigen Voraussetzungen gilt.

1) Gilt für alle Eigenwerte λ_j von $\mathbf{A} = \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0})$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0,$$

so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein strikt stabiler Gleichgewichtspunkt von $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, d.h. die Stabilität des linearisierten Systems überträgt sich auf das nichtlineare System.

2) Existiert ein Eigenwert λ_j von $\mathbf{A}$ mit

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0,$$

so ist der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ instabil, d.h. die Instabilität des linearisierten Problems überträgt sich ebenfalls aus das nichtlineare Problem.

! $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$ Keine Aussage

Wichtige Bemerkung zur Linearisierung.

Bemerkung: Die Stabilitätsuntersuchung eines nichtlinearen Systems mittels Linearisierung funktioniert **nicht**, falls

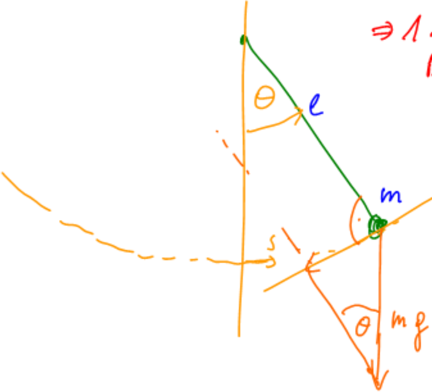
1. für alle Eigenwerte λ von $\mathbf{A}$
$$\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0,$$
gilt
2. **und** mindestens ein Eigenwert λ mit
$$\mathrm{Re}(\lambda) = 0$$
existiert.

Insbesondere spielt es bei Eigenwerten λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ keine Rolle, wie es sich mit der algebraischen und geometrischen Vielfachheit verhält.

Und: Gerade mechanische Systeme, die ungedämpfte Schwingungen beschreiben, besitzen rein imaginäre Eigenwerte.

3 Parameter l, m, g

$\Rightarrow$ 1 dimensionsloser Parameter $\omega^2 = \frac{g}{l}$



$s = l\theta$

$\dot{s} = l\dot{\theta}$

$\ddot{s} = l\ddot{\theta}$

$$m l \ddot{\theta} = -mg \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2} \sin\theta$$

Beispiel: Das mathematische Pendel.

Das mathematische Pendel wird beschrieben durch die nichtlineare Differentialgleichung

$$\ddot{\Phi} = -\frac{g}{l} \sin \Phi = -\omega^2 \sin \Phi$$

$\phi = \phi(t)$

nichtlinear

Dabei bezeichnet $\Phi = \Phi(t)$ den Auslenkungswinkel zur Zeit t, l die Länge des Pendels und g die Gravitationskonstante.

Mittels der Substitution

$$y_1 := \Phi \qquad y_2 = \dot{\Phi}$$

erhalten wir das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin y_1 \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind gerade die Nullstellen der rechten Seite,

$$y_{1k} = k\pi \quad \text{und} \quad y_{2k} = 0 \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel: Linearisierung um den Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}_k = (y_{1k}, y_{2k})^T = (k\pi, 0)^T, k \in \mathbb{Z}$.

Wir linearisieren um den Gleichgewichtspunkt $(y_{1k}, y_{2k}) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbf{f}(y_1, y_2) = \underbrace{\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k})}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{J}\,\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k}) \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - \underbrace{y_{2k}}_{=0} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|)$$

$$= \mathbf{J}\,\mathbf{f}(k\pi, 0) \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos k\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 (-1)^k & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|)$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix} \\ Jf &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos y_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

Stabilität des linearisierten mathematischen Pendels.

Die Linearisierung ergibt sich das lineare System

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2(-1)^k(y_1 - k\pi) \end{aligned}$$

Wir berechnen die Eigenwerte der (konstanten) Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2(-1)^k$$

Für die Eigenwerte folgt daraus

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm i\omega & : \quad \text{falls } k \text{ gerade} \\ \pm\omega & : \quad \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} = 0$ Keine Aussage.

Stabilität

$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0$

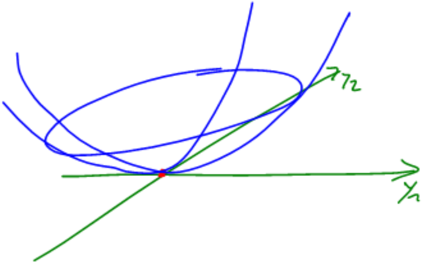
instabil

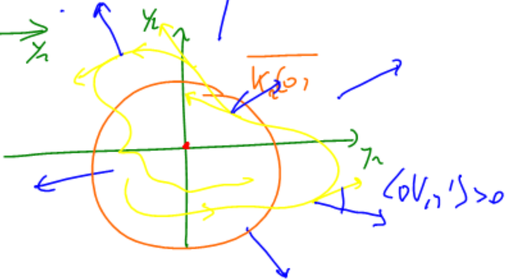
$$E(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} + w^2(1 - \cos y_1)$$

$$\dot{E} = y_2 \dot{y}_2 + w^2 \sin y_1 \dot{y}_1 = y_2(-w^2 \sin y_1) + w^2 \sin y_1 y_2 = 0$$

$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$$

$$\nabla V = 2\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$





$$\langle \nabla V, y' \rangle = \langle \nabla V, f \rangle \leq 0$$

Stabilität mittels Ljapunov–Funktionen.

Wir betrachten wieder das nichtlineare **autonome** System

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \qquad \text{mit } \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Definition: Eine $\mathcal{C}^1$–Funktion $V : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt Ljapunov–Funktion auf $\bar{K}_r(\mathbf{0}) \subset D$ für $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, falls gilt

a)

$$\begin{cases} V(\mathbf{0}) = 0 \\ V(\mathbf{y}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0}) \end{cases}$$

b)

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle \leq 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0})$$

Gilt in b) sogar

b')

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle < 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{y} \text{ mit } 0 < \|\mathbf{y}\| \leq r$$

so nennt man $V(\mathbf{y})$ eine strenge Ljapunov–Funktion.

Stabilitätssatz IV mit Ljapunov–Funktionen.

Satz: (Stabilitätssatz IV)

1) Existiert eine Ljapunov–Funktion $V(\mathbf{y})$ von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, so ist die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein gleichmäßig stabiler Gleichgewichtspunkt.
2) Ist $V(\mathbf{y})$ zudem eine strenge Ljapunov–Funktion von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, so ist die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Beweisidee: Wir berechnen die Zeitableitung der Funktion $V(\mathbf{y}(t))$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(\mathbf{y}(t)) &= \operatorname{grad}(V(\mathbf{y}(t))) \cdot \mathbf{y}'(t) \\
&= \operatorname{grad}(V(\mathbf{y}(t))) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \\
&= \langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle
\end{aligned}
$$

≤ 0 gehe nicht aufwärts

< 0 gehe immer abwärts

Ist V eine (strenge) Ljapunov–Funktion, so ist $V = V(\mathbf{y}(t))$ (streng) monoton fallend.

Bemerkung: Wir betrachten wieder die autonome Gleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \qquad \text{mit } \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

d.h. die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist ein Gleichgewichtspunkt.

Existiert eine $\mathcal{C}^1$–Funktion $V(\mathbf{y})$ mit den Eigenschaften

a')

$$\begin{cases} V(\mathbf{0}) = 0 \\ V(\mathbf{y}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0}) \end{cases}$$

und

b')

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle > 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{y} \text{ mit } 0 < \|\mathbf{y}\| \le r$$

so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

Wir betrachten das nichtlineare System (0,0) ist stationärer Punkt

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = Df(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + g(x,y)$

$Df(0,0) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ -1 & -5y^4 \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + y \\ \dot{y} &= -x - y^5 \end{aligned}$$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

Stab. Satz III kein Ergebnis

Der Nullpunkt ist ein isolierter Gleichgewichtspunkt des Systems.

Mit dem Ansatz

$$V(x,y) = ax^2 + by^2,\, a, b > 0$$

a, b noch offen

gilt offensichtlich

a) $$V(0,0) = 0 \quad \text{und} \quad V(x,y) > 0 \text{ für } (x,y) \neq (0,0)$$

$\nabla V = \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}$

Fortsetzung des Beispiels.

Weiter berechnet man

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla V(x,y), \mathbf{f}(x,y) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 2ax(-x^3 + y) + 2by(-x - y^5) \\
&= -2ax^4 + 2axy - 2bxy - 2by^6
\end{aligned}
$$

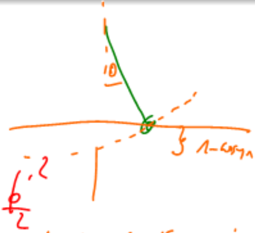
Setzt man $a = b > 0$, so folgt $= -2ax^4 - 2by^6 < 0 \quad (x,y) \neq (0,0)$

$$V(x,y) = -2ax^4 - 2by^6$$

d.h. V ist eine strenge Ljapunov–Funktion und der Nullpunkt ist ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Ljapunov–Funktion für das mathematische Pendel.

Beim mathematischen Pendel



$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin y_1 \end{aligned}$$

setzt man

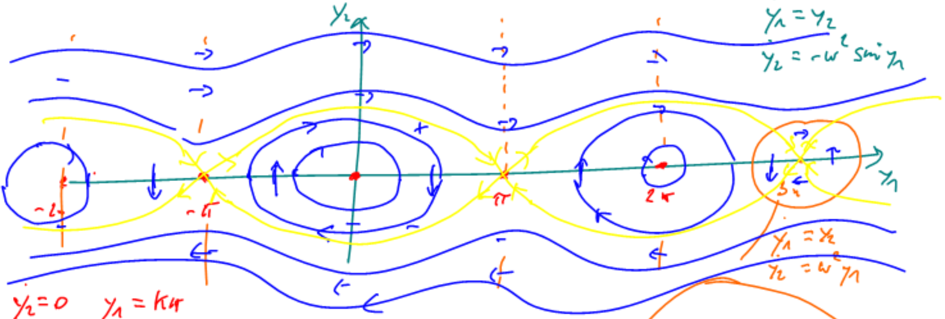
kinetische En.   potentielle Energie

$$V(y_1, y_2) := \frac{1}{2} y_2^2 + \omega^2 (1 - \cos y_1)$$

a) Damit gilt $V(0,0) = 0$ und $V(y_1, y_2) > 0$ für $(y_1, y_2) \in \bar{K}_r(\mathbf{0})$, $r < \pi$. Weiter berechnet man

$$\langle \nabla V, \mathbf{f} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \omega^2 \sin y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

Also ist V eine Ljapunov–Funktion auf $\bar{K}_r(\mathbf{0})$ und der Nullpunkt ist ein stabiler Gleichgewichtspunkt. Allerdings ist V keine strenge Ljapunov–Funktion, denn der Ursprung ist auch nicht asymptotisch stabil.



$y_2 = 0 \qquad y_1 = k\pi$

$\dot y_1 = 0$

$$\frac{y_2^2}{2} + w^2(1-\cos y_1) = \text{const}$$

$$y_2 = \pm\sqrt{-2w^2(1-\cos y_1) + \text{const}}$$

$\lambda_{1|2} = \pm w$

$n_{1|2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm w \end{pmatrix}$