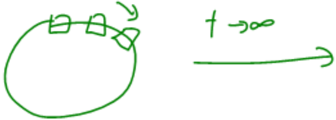
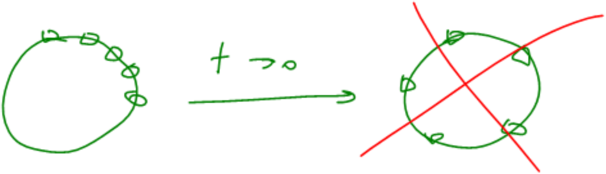


Abstand konst.

Gesch. konst



3.5 Stabilität

Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \qquad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$$

mit hinreichend glatter rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$. Weiterhin sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.

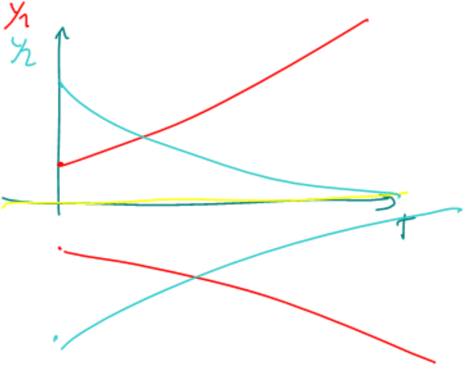
Frage: Wie verhalten sich benachbarte Lösungen $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$?

Beispiel: Wir betrachten die beiden Anfangswertaufgaben $y_2(t) = y_0 e^{-t}$

$y_1(t) = y_0 e^{t}$
$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & y_1(t) \\ y_1(0) & = & 0 \end{array} \right.} \; \boxed{y_1 = 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} y_2'(t) & = & -y_2(t) \\ y_2(0) & = & 0 \end{array} \right.} \; \boxed{y_2 = 0}$$

In beiden Fällen ist die Lösung $y^*(t) = 0$. Die Lösungen $y(t; 0, y_0)$ mit einer Anfangsbedingung $y_0 \neq 0$ sind aber gegeben durch

$$y_1(t) = y_0 e^t \to \pm\infty \qquad \text{bzw.} \qquad y_2(t) = y_0 e^{-t} \to 0 \qquad \text{für} \quad t \to \infty$$



y_1
y_2
t

Definition:

a) Die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ heißt stabil auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, falls es zu $t_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $\mathbf{y}_0$ mit $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta$ gilt

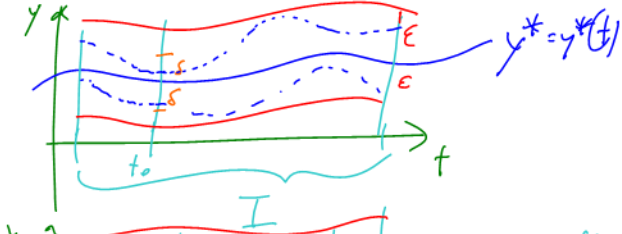
$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t)\| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \in I$$

Kann man δ unabhängig von t_0 wählen, so nennt man $\mathbf{y}^*(t)$ gleichmäßig stabil auf I.

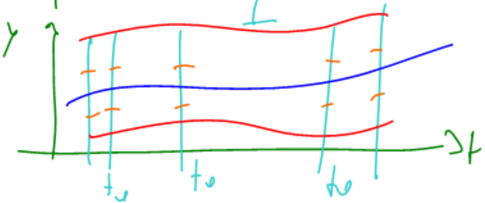
b) Ist die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ auf einem Intervall $[a, \infty)$ erklärt, so heißt $\mathbf{y}^*(t)$ dort asymptotisch stabil, falls $\mathbf{y}^*(t)$ dort stabil ist, und es zu $t_0 \geq a$ stets ein $\delta(t_0) > 0$ gibt, sodass für alle $\mathbf{y}_0$ mit $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta$ gilt

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t_0)\| = 0$$

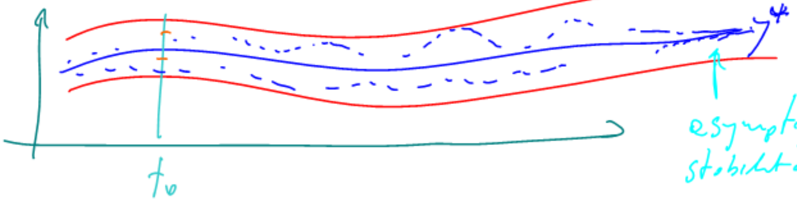
Die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ heißt strikt stabil, falls $\mathbf{y}^*(t)$ gleichmäßig und asymptotisch stabil ist.



Stabil



$\forall t_0$ gleichm. stab.



asymptotische stabilität

Stabilitätsuntersuchung der Nulllösung reicht aus.

Bemerkung: Sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Setzen wir

$$\mathbf{z}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t)$$

so erfüllt $\mathbf{z}(t)$ die Differentialgleichung

$f^*(t,0) = 0$

$$\mathbf{z}'(t) = \overbrace{\mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t) + \mathbf{y}^*(t))}^{y'(t)} - \overbrace{\mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*(t))}^{y^{*\prime}(t)} =: \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

Gleichzeitig sieht man sofort, dass $\mathbf{z}^*(t) = \mathbf{0}$ eine Lösung von

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

ist.

Statt der Stabilität von $\mathbf{y}^*(t)$ können wir also – äquivalent dazu – die Stabilität der Nulllösung von $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$ untersuchen.

Falls linear

$y' = A(t)y + b(t)$, y^* sei Lsg

$z(t) = y(t) - y^*(t)$

$z'(t) = A(t)\left(z(t) + \cancel{y^*(t)}\right) \cancel{+ b(t)} - \cancel{A(t)y^*(t)} - \cancel{b(t)} = A(t)\,z(t)$

Stabilitätssatz I bei linearen Differentialgleichungen.

$y(t) = Y(t)c$
$y(t_0) = Y(t_0)c \overset{!}{=} y_0$
$\Rightarrow c = Y^{-1}(t_0)y_0$
$y(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)y_0$

Für ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) \qquad \text{mit } a \leq t < \infty$$

und stetiger Matrix $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $\mathbf{Y}(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem.

Satz: (Stabilitätssatz I)

1) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann stabil auf dem Intervall $[a, \infty)$, falls das Fundamentalsystem $\mathbf{Y}(t)$ auf I beschränkt ist.

2) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann gleichmäßig stabil auf I, falls es eine Konstante $M > 0$ gibt, sodass für alle $t \geq t_0 \geq a$ gilt

$$\|\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\| \leq M$$

3) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, falls gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{Y}(t)\| = 0$$

$y(t) = Y(t)\, Y^{-1}(t_0)\, y_0$

$\|y(t) - 0\| = \|y(t)\| = \|Y(t)\, Y^{-1}(t_0)\, y_0\| \leq \|Y(t)\|\, \|Y^{-1}(t_0)\|\, \|y_0\| \leq \varepsilon$

stabil $\quad \|Y(t)\| \leq M_0 \qquad \varepsilon = M_0 \|Y^{-1}(t_0)\|\, \delta$

gleichm. stabil $\quad \|Y(t)\, Y^{-1}(t_0)\| \leq M \qquad \varepsilon = \underbrace{\|Y(t)\, Y^{-1}(t_0)\|}_{\leq M} \delta$

asympt. stab. $\quad \|Y(t)\| \xrightarrow{t \to \infty} 0 \qquad \Rightarrow \|y(t)\| \xrightarrow{t \to \infty} 0$

Ein weiteres Stabilitätskriterium.

Satz: Sei $\lambda(t)$ der größte Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T$. Ist die Beziehung

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t) dt = -\infty$$

erfüllt, so folgt für jede Lösung $\mathbf{y}(t)$ der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = 0,$$

d.h. $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist $\boxed{\text{asymptotisch stabil.}}$

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\boxed{\frac{d}{dt}\|\mathbf{y}\|^2} &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{y}^T\mathbf{y}\right) = \overbrace{(\mathbf{A}\mathbf{y})^T}^{y^{T'}}\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{y})}_{}^{y'} = \mathbf{y}^T\left(\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\right)\mathbf{y} \le \text{weil größten EW} \\
&\le \lambda(t)(\mathbf{y}^t\mathbf{y}) = \boxed{\lambda(t) \cdot \|\mathbf{y}\|^2}
\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Integration (mit Gronwall)

$$\|\mathbf{y}\|^2 \le \|\mathbf{y}_0\|^2 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau) d\tau\right)$$

Stabilitätssatz II bei linearen Differentialgleichungen.

Satz: (Stabilitätssatz II) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ mit der konstanten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist genau dann

1) strikt stabil, falls für alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gilt: $\mathrm{Re}\,(\lambda_j) < 0$.

2) gleichmäßig stabil, falls für alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gilt:

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_j) \leq 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}\,(\lambda_j) = 0 \Rightarrow g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$$

3) In allen anderen Fällen ist die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ instabil.

Beispiel: Die Nulllösung des Systems mit Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

ist instabil, denn die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 0$ (doppelter Eigenwert), aber $g(\lambda_2) = 1 < a(\lambda_2) = 2$.

i.A. $\quad r_i e^{\lambda_i t}, \quad .$

falls $\quad a(\lambda_i) \neq g(\lambda_i)$ $\qquad r_i e^{\lambda_i t}, \quad h_i e^{\lambda_i t}$

$w_1 e^{\lambda_i t} \quad w_2(t) e^{\lambda_i t}$

$\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \qquad e^{\lambda_i t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$\operatorname{Re}\lambda_i = 0 \qquad e^{i \operatorname{Im}\lambda_i \cdot t} \not\longrightarrow 0$

$\not\longrightarrow \infty$

$w_2(t) e^{i \operatorname{Im}\lambda_i \cdot t} \xrightarrow{t\to\infty} t\infty$

$\exists \lambda_i \quad \operatorname{Re}\lambda_i > 0 \qquad e^{\lambda_i t} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$

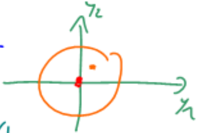
i) $y' = 0$ linear $\lambda_1 = 0$ $e(\lambda_1) = g(\lambda_1) \Rightarrow$ stabil

$y = c$ $\delta = \varepsilon$

ii) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $g(\lambda_1) = a(\lambda_1) = 2$

$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(t) = c_1 r_1 e^{0t} + c_2 r_2 e^{0t}$



iii) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $g(\lambda_1) = 1$ $a(\lambda) = 2$

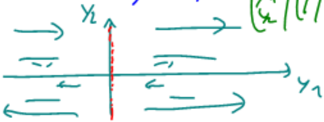
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{0t} + c_2 e^{0t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}$

unbeschränkt

instabil

$y_1' = y_2$

$y_2' = 0$



Ein Beispiel zum Stabilitätssatz II.

1. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

suche Konstante Lsg

2. Der eindeutige Gleichgewichtspunkt ergibt sich als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und ist gegeben durch $\mathbf{y}^* = (3, -2)^T$.

3. Die Transformation $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ liefert das homogene System

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z}.$$

4. Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ lauten $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ und damit ist $\mathbf{y}^*$ strikt stabil.

Satz: (Kriterium von Routh und Hurwitz) Gegeben sei das reelle Polynom

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \text{mit } a_n > 0.$$

Dann sind äquivalent:

1) Alle Nullstellen von $p(z)$ haben negativen Realteil.
2) Es gilt $a_k > 0$ für alle $k = 0, 1, \ldots, n$, und alle Hauptunterdeterminanten der (n, n)–Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

sind positiv. Dabei setzen wir $a_k = 0$ für alle $k > n$.

Ein Beispiel zum Kriterium von Routh und Hurwitz.

Gegeben sei das Polynom mit strikt positiven Koeffizienten

$$p(z) = 2z^3 + 4z^2 + 5z + 6$$

Wir stellen zunächst die Matrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ auf:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$e_5 = e_4 = 0$

Die Hauptunterdeterminaten sind $\det \mathbf{H}_1 = |5| = 5$ sowie

$$\det \mathbf{H}_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \qquad \text{und} \qquad \det \mathbf{H}_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

Also besitzen alle Nullstellen von $p(z)$ einen negativen Realteil.

Qualitatives Verhalten für ebene konstante Systeme.

Wir betrachten das homogene ebene System mit konstanten Koeffizienten

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \qquad \text{mit } \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Weiterhin seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit den zugehörigen Eigenvektoren bzw. Eigen– und Hauptvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.

Mit $\mathbf{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ und

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ oder } \lambda_1 = \lambda_2, g(\lambda_2) = 2 \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ und } g(\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

erhalten wir für $\mathbf{w}(t) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t)$ die Differentialgleichung $\mathbf{w}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{w}(t)$.

In der (w_1, w_2)–Phasenebene ergibt sich dann qualitativ das folgende Stabilitätsverhalten: Fortsetzung auf Folie.

Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen.

Wir betrachten das nichtlineare **autonome** System

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \quad = \underbrace{\cancel{f(0)}}_{=0} + \underbrace{Jf(0)}_{A}\, y + g(y)$$

wobei $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gelte, d.h. $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

Stabilitätsuntersuchung mittels Linearisierung der rechten Seite

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) \\
\mathbf{A} &= \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0}) \\
\mathbf{g}(\mathbf{y}) &= \mathbf{o}(\|\mathbf{y}\|) \quad \text{mit } \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\|g(y)\|}{\|y\|} = 0$$

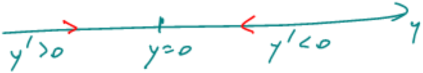
Folgt aus Taylor–Entwicklung der rechten Seite um den Entwicklungspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0})\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

$y' = -y|y|$ $\qquad \lambda_1 = 0$

$A = \frac{d}{dy} f(0) = 0$

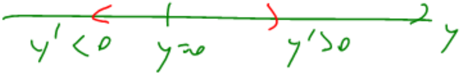
Nullbp. stabil



$y' = +y|y|$ $\qquad \lambda_1 = 0$

$A = 0$

Nullb. instabil



Stabilitätssatz III für nichtlineare Gleichungen.

Satz: (Stabilitätssatz III) Mit den obigen Voraussetzungen gilt.

1) Gilt für alle Eigenwerte λ_j von $\mathbf{A} = \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0})$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0,$$

so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein strikt stabiler Gleichgewichtspunkt von $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, d.h. die Stabilität des linearisierten Systems überträgt sich auf das nichtlineare System.

2) Existiert ein Eigenwert λ_j von $\mathbf{A}$ mit

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0,$$

so ist der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ instabil, d.h. die Instabilität des linearisierten Problems überträgt sich ebenfalls aus das nichtlineare Problem.

! $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$ Keine Aussage

Wichtige Bemerkung zur Linearisierung.

Bemerkung: Die Stabilitätsuntersuchung eines nichtlinearen Systems mittels Linearisierung funktioniert **nicht**, falls

1. für alle Eigenwerte λ von $\mathbf{A}$
$$\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0,$$
gilt
2. **und** mindestens ein Eigenwert λ mit
$$\mathrm{Re}(\lambda) = 0$$
existiert.

Insbesondere spielt es bei Eigenwerten λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ keine Rolle, wie es sich mit der algebraischen und geometrischen Vielfachheit verhält.

Und: Gerade mechanische Systeme, die ungedämpfte Schwingungen beschreiben, besitzen rein imaginäre Eigenwerte.