3.4 Die Laplace–Transformation

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine reell– oder komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}$. Die Laplace–Transformierten von F ist gegeben durch die Integraltransformation

$$f(s) := \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt = \lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega e^{-st} F(t) dt \qquad (3)$$

wobei $s \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl ist.

Frage: Für welche Funktionen $F(t)$ existiert das uneigentliche Integral?

Schreiben wir die komplexe Zahl s als

$$s = \sigma + i\omega$$

so folgt

$$f(s) := \int_0^\infty e^{-\sigma t}\Big(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\Big)F(t)dt$$

Antwort: Wachstumsverhalten von $F(t)$ ist entscheidend.

hinreichende Bedingung

Satz: Ist F auf $[0, \infty)$ lokal integrierbar und erfüllt F mit gewissen Konstanten M und σ_0 eine Ungleichung der Form

$$|F(t)| \leq Me^{\sigma_0 t} \qquad \text{für alle } t \geq 0,$$

so existiert die Laplace–Transformierte für alle $s \in \mathbb{C}$ mit

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$$

Beweisidee: Setzen wir $s = \sigma + i\omega$, so gilt

$$|e^{-st}F(t)| = e^{-\sigma t}|F(t)| \leq Me^{-(\sigma-\sigma_0)t}$$

Aus $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ folgt also $\quad \int_0^\infty |e^{-st}F(t)|\,dt \leq M\int_0^\infty e^{-(\sigma-\sigma_0)t}\,dt$

$$(\sigma - \sigma_0)t > 0 \qquad \text{für alle } t > 0$$

und damit die Konvergenz des uneigentlichen Integrals. $\quad \sigma = \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

Notationen und Bezeichnungen.

Sei $F(t)$ eine reell– oder komplexwertige Funktion, für die die Laplace–Transformierte $f(s)$ existiert.

1. Wir schreiben auch $f = \mathcal{L}[F]$
2. Das Doetsch–Symbol lautet $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$:

$$F \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet f \quad \text{oder} \quad f \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ F$$

3. Eine Beziehung

$$f = \mathcal{L}[F] \quad \text{bzw.} \quad F \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet f$$

nennt man eine Korrespondenz, die Zuordnung $F \longrightarrow f$ heißt Laplace–Transformation.

4. Die Laplace–Transformation ist linear, d.h.

$$\mathcal{L}[\alpha F + \beta G] = \alpha \mathcal{L}[F] + \beta \mathcal{L}[G]$$

Linearität des Integrals.

Beispiel zur Laplace–Transformation.

Wir betrachten die Heaviside–Funktion

$$H(t) := \begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ 1 & : \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Die Laplace–Transformierte lautet

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Dies ergibt die Korrespondenz

$$1 \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$$

Beispiel zur Laplace–Transformation.

$$= \frac{n!}{s^n}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Die Laplace–Transformierte von

$$F(t) = t^n \qquad \text{mit } n = 1, 2, \dots$$

$$= \frac{n(n-1)}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}\,t^{n-2}\,dt = \dots$$

ist gegeben durch

$$f(s) = \int_0^\infty \overset{v'}{e^{-st}}\,\overset{u}{t^n}\,dt = \cancel{-\frac{e^{-st}}{s}\,t^n\Big|_0^\infty} + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,t^{n-1}\,dt =$$

Das Integral existiert für $\mathrm{Re}(s) > 0$ und mittels partieller Integration findet man

$$\int_0^\infty e^{-st}\,t^n dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,t^{n-1} dt$$

Eine wiederholte Anwendung der partiellen Integration ergibt die Korrespondenz

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Gegeben sei die komplexe Funktion

$$F(t) = e^{at} \qquad \text{mit } a = \alpha + i\beta.$$

Für die Laplace–Transformierte ergibt sich

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt \\ &= -\frac{1}{s-a}\, e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

für $\boxed{\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a) = \alpha.}$

Damit erhalten wir die Korrespondenz

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \; \frac{1}{s-a}$$

Beispiel zur Laplace–Transformation.

Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \sin(\omega_0 t) \qquad \text{mit } \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Wegen

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$$

erhalten wir die Korrespondenz

$$\sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

denn

$$\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega_0} - \frac{1}{s+i\omega_0}\right) = \frac{1}{2i}\,\frac{\cancel{s}+i\omega_0-\cancel{s}+i\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

Beispiel zur Laplace–Transformation.

Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \cos(\omega_0 t) \qquad \text{mit } \omega_0 \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Wegen

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$$

erhalten wir die Korrespondenz

$$\cos(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

denn

$$\frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\right)$$

Korrespondenztabelle.

$\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

$F(t)$	$f(s)$	σ_0	Bemerkung
1	$\frac{1}{s}$	0	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0	$n = 1, 2, \ldots$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}(a)$	a komplex
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	0	ω_0 reell
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	0	ω_0 reell

Grundregeln der Laplace–Transformation.

1. Additionssatz: Für beliebige komplexe Konstanten a und b gilt

$$aF(t) + bG(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; af(s) + bg(s)$$

2. Ähnlichkeitssatz: Für jede reelle Konstante $\alpha > 0$ gilt

$$F(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{s}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{\alpha}\alpha t} F(\alpha t)\, d(\alpha t)$$

Beispiel: Aus

$$e^t \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s-1}$$

folgt

$$e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\frac{s}{\alpha} - 1} = \frac{1}{s-\alpha}$$

Grundregeln der Laplace–Transformation.

3. Differentiationssatz: F sei für $t > 0$ differenzierbar und es existiere die Laplace–Transformierte von F'. Dann gilt $\int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = \underbrace{e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty}_{-F(0)} + \underbrace{s\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt}_{s\,f(s)} =$

$$F'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; sf(s) - F(0)$$

Besitzt F im Ursprung eine Unstetigkeitsstelle, so ist $F(0)$ der rechtsseitige Grenzwert

$$F(0) := \lim_{t \searrow 0} F(t)$$

$\int_0^\infty e^{-st}F''(t)\,dt = s\,\mathcal{L}[F'] - F'(0)$
$= s(sf(s) - F(0)) - F'(0)$
$= s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$

Allgemein gilt für höhere Ableitungen ($n \geq 2$) die Formel

$$F^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - F^{(n-1)}(0)$$

4. Multiplikationssatz: Es gilt $\int_0^\infty e^{-st}(-t)F(t)\,dt = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = \frac{d}{ds}f(s)$

$$-tF(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; f'(s) \quad \text{bzw.} \quad tF(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; -f'(s)$$

und allgemein

$$(-t)^n F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; f^{(n)}(s) \quad \text{bzw.} \quad t^n F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; (-1)^n f^{(n)}(s)$$

Grundregeln der Laplace–Transformation.

5. Integrationssatz: Es gilt $\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t F(\tau)\,d\tau\,dt = \cancel{\frac{e^{-st}}{-s}\int_0^t F(\tau)\,d\tau}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt}_{f(s)}$

$$\int_0^t F(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{f(s)}{s}$$

6. Divisionssatz: Die Funktion besitze den Wachstumskoeffizienten σ_0, und es existiere die Laplace–Transformierte von

$$G(t) := \frac{F(t)}{t}$$

Dann gilt für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ $\int_0^\infty e^{-st}\frac{F(t)}{t}\,dt = \int_s^\infty \int_0^\infty e^{-ut}F(t)\,dt\,du$

$$G(t) = \frac{F(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \int_s^\infty f(u)du$$

- ❼ Verschiebungssatz: Für alle $T_0 > 0$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t-T_0)\,dt = e^{-sT_0}\int_0^\infty e^{-s(t-T_0)} F(t-T_0)\,d(t-T_0)$$

$$F(t - T_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; e^{-sT_0} f(s)$$

- ❽ Dämpfungssatz: Für ein beliebiges komplexes a gilt:

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{at} F(t)\,dt = f(s-a)$$

$$e^{at} F(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; f(s - a)$$

Beispiel: Aus

$$\sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

folgt

$$e^{at}\, \sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega_0}{(s - a)^2 + \omega_0^2}$$

Laplace–Transformation und Differentialgleichungen.

Nach dem Differentiationssatz gilt

$$F'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; sf(s) - F(0)$$

Idee: Gegeben sei die Anfangswertaufgabe   linear, konst. Koeff.

DGL + AB

$$Y'(t) = Y(t), \qquad Y(0) = 1$$

Für die Laplace–Transformierte $y(s)$ von $Y(t)$ ergibt sich dann

$$sy(s) - \underbrace{1}_{Y(0)} = y(s) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(s) = \frac{1}{s-1}}$$

Algebraische Gl

und aus der Korrespondenztabelle erhalten wir

$$Y(t) = e^t$$

Resultat: Lineare Differentialgleichungen ergeben algebraische Gleichungen für die Laplace–Transformierte.

Beispiel.

Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems ($\alpha > 0$) linear, konstante Koeffiz.

$$\underbrace{Y''(t)} + \underbrace{\alpha^2 Y(t)} = \underbrace{\sin(\alpha t)}$$

mit $\underline{Y(0) = Y'(0) = 0}$.

Nach der Korrespondenztabelle erhalten wir

$$s^2 y(s) - s\cancel{Y(0)} - \cancel{Y'(0)} + \alpha^2 y(s) = \boxed{s^2 y(s) + \alpha^2 y(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}}$$

und es gilt

$$\boxed{y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2}}$$

Man könnte nun mit einer Partialbruchzerlegung weitermachen.

Wir verwenden hier die Beziehung

$$y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2} = -\frac{1}{2s} \frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Mit

$$F(t) = \sin(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} = f(s)$$

und dem Multiplikationssatz

$$t\sin(\alpha t) = \; tF(t) \circ\!\!-\!\!\bullet -f'(s) = \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2} = 2s\,y(s) = -\frac{d}{ds}\,\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

folgt

$$-\frac{d}{ds}\,\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; t\sin(\alpha t)$$

Anwendung des Integrationssatzes liefert dann die Beziehung

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{s}\,\frac{d}{ds}\,\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{1}{2}\int_0^t \tau\sin(\alpha\tau)d\tau = \frac{1}{2\alpha^2}\Big(-\alpha t\cos(\alpha t)+\sin(\alpha t)\Big)$$

Die Lösung lautet demnach

$$Y(t) = \frac{\cancel{2}\,1}{2\alpha^2}\Big(-\alpha t\cos(\alpha t)+\sin(\alpha t)\Big)$$

Romeo & Julia

$$\begin{pmatrix} j \\ r \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \pm a r \\ b j \end{pmatrix} \qquad j(0) = j_0 \qquad j \to y$$
$$r(0) = r_0 \qquad r \to z$$

$$\left.\begin{aligned} s y(s) - j_0 &= \pm a z(s) \\ s z(s) - r_0 &= b y(s) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{pmatrix} s & \mp a \\ -b & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 \mp ab} \begin{pmatrix} s & \pm a \\ b & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 \mp ab} \begin{pmatrix} j_0 s & \pm a r_0 \\ j_0 b & s r_0 \end{pmatrix}$$

Linearkombination $\quad \frac{s}{s^2 \mp ab} \quad \frac{1}{s^2 \mp ab}$

$\oplus \quad \frac{1}{s - \sqrt{ab}} \quad \frac{1}{s + \sqrt{ab}} \quad \to \quad e^{\sqrt{ab}\, t}, \; e^{-\sqrt{ab}\, t}$

$\ominus \quad \frac{s}{s^2 + ab}, \; \frac{1}{s^2 + ab} \quad \to \quad \cos \sqrt{ab}\, t, \; \sin \sqrt{ab}\, t$

Ein zweites Beispiel.

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

linear, konst. Koeff.

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y'' + Y' + 4Z & = & \sin(\omega t) \\ Y' + Z' + Z & = & 0 \end{array}\right.$$

mit den Anfangsbedingungen $\boxed{Y(0) = -\frac{1}{3},\ Y'(0) = 0 \text{ und } Z(0) = 0}$

Anwendung der Laplace–Transformation ergibt

$$\begin{array}{rcl} s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) + sy(s) - Y(0) + 4z(s) & = & \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} \\ sy(s) - Y(0) + sz(s) - Z(0) + z(s) & = & 0 \end{array}$$

Mit den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} s(s+1)y(s) + 4z(s) & = & \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} - \dfrac{s+1}{3} \\ sy(s) + (s+1)z(s) & = & -\dfrac{1}{3} \end{array}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Die Funktionen $(y(s), z(s))$ erfüllen ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix

$$A = A(s) = \begin{pmatrix} s(s+1) & 4 \\ s & s+1 \end{pmatrix}$$

$A(s)\begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

und die Lösung lautet

$$y(s) = \frac{3\omega(s+1) - [(s+1)^2 - 4](s^2+\omega^2)}{3(s^2+\omega^2)s[(s+1)^2-4]}$$

$$z(s) = \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)[(s+1)^2-4]}$$

$\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2+w^2}, \frac{s}{s^2+w^2}, \frac{1}{s-1}, \frac{1}{s+3}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1, \sin wt, \cos wt, e^t, e^{-3t}$

Die nächsten Schritte:

1. Partialbruchzerlegung
2. Rücktransformation aus der Korrespondenztabelle

Komplettierung des Beispiels.

Nach längeren Umformungen ergibt sich

$$
\begin{aligned}
y(t)\ \cancel{y(s)} &= -\frac{\omega^2-3}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\cos(\omega t) - \frac{\omega^2+5}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\sin(\omega t) \\
&\quad + \frac{\omega}{2(\omega^2+1)}e^{t} - \frac{\omega}{6(\omega^2+9)}e^{-3t} - \frac{\omega+1}{3\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z(t)\ \cancel{z(s)} &= \frac{2\omega}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\cos(\omega t) + \frac{\omega^2+3}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\sin(\omega t) \\
&\quad - \frac{\omega}{4(\omega^2+1)}e^{t} + \frac{\omega}{4(\omega^2+9)}e^{-3t}
\end{aligned}
$$

Fazit: komplizierte Rechnungen, aber einfaches Lösungskonzept!

$$Y'' + Y' + 4z = \sin\omega t$$
$$Y' + z' + z = 0$$

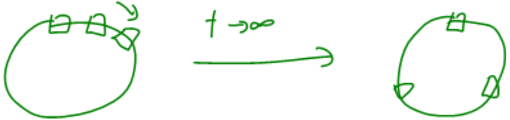
$$Y' - W = 0$$
$$w' + w + 4z = \sin\omega t$$
$$w + z' + z = 0$$

$$\begin{pmatrix} y \\ w \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -3$

$n_1 \cdot e^{0t} \quad n_2 e^{t} \quad n_3 e^{-3t}$

$+ LK \quad \sin\omega t \quad \cos\omega t$



Abstand konst.

Geschw. konst