Die inhomogene Differentialgleichung höherer Ordnung.

Ist das Funktionensystem $(y_1, \dots, y_n)$ ein Fundamentalsystem, so ist die Matrix

$y_p(t) = Y(t)c(t)$

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \dots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix des zugehörigen Systems erster Ordnung. Die Methode der Variation der Konstanten ergibt dann das lineare Differentialgleichungssystem:

$Y(t)c'(t) = h(t)$

$$\begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \dots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_{n-1}' \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Die Methode der Greenschen Funktion (Grundlösungsverfahren).

Gegeben sei die inhomogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = h(t)$$

Satz: Sei $w(t)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$L[w] = 0, \quad w^{(k)}(t_0) = \begin{cases} 0 & : \quad k = 0, \ldots, n-2 \\ 1 & : \quad k = n-1 \end{cases}$$

Dann ist eine spezielle Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)h(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} w(t-\tau+t_0)\, h(\tau)\, d\tau$$

$$G(t,\tau) = w(t-\tau+t_0) \qquad \text{(Greensche Funktion)}$$

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} w(t-\tau+t_0)\, h(\tau)\, d\tau$$

$$y_p'(t) = \underbrace{w(t_0)}_{=0} h(t) + \int_{t_0}^{t} w'(t-\tau+t_0)\, h(\tau)\, d\tau$$

$$y_p''(t) = \underbrace{w'(t_0)}_{=0} h(t) + \int_{t_0}^{t} w''(t-\tau+t_0)\, h(\tau)\, d\tau$$

$$y_p^{(n)}(t) = \underbrace{w^{(n-1)}(t_0)}_{=1} h(t) + \int_{t_0}^{t} w^{(n)}(t-\tau+t_0)\, h(\tau)\, d\tau$$

$$L[y_p(t)] = h(t) + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k w^{(k)}(t-\tau+t_0)\right)}_{=0} h(\tau)\, d\tau = h(t)$$

! a_k = const

Lineare Gleichungen n–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Gegeben sei die homogene Gleichung

$$L[y] := a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = \cancel{h(t)}\ 0$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$ und $a_n = 1$. Zur Berechnung eines Fundamentalsystems machen wir den Ansatz

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

Daraus folgt

$$L[y] = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right) \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} \quad = 0$$

Unser Ansatz liefert eine Lösung, falls λ eine Nullstelle der so genannten charakteristischen Gleichung ist:

$$p(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$$

Die charakteristische Gleichung und Fundamentalsysteme.

Satz:

1) Ist λ_k eine r_k–fache reelle Nullstelle von $p(\lambda)$, so existieren die folgenden Lösungen der homogenen Gleichung

$$\begin{aligned} y_{k1}(t) &= e^{\lambda_k t} \\ y_{k2}(t) &= t \cdot e^{\lambda_k t} \\ &\vdots \\ y_{k,r_k}(t) &= t^{r_k - 1} \cdot e^{\lambda_k t} \end{aligned}$$

2) Ist λ_k eine r_k–fache **komplexe** Nullstelle, $\lambda_k \notin \mathbb{R}$, so sind die reellen Lösungen mit $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ gegeben durch

$$y_{kj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t) \qquad y_{lj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t)$$

und $j = 1, \ldots, r_k$.

3) Die Lösungen aus 1) und 2) bilden ein Fundamentalsystem von $L[y] = 0$.

Beispiele.

- Gegeben sei die homogene Gleichung vierter Ordnung

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet dann:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \qquad (\lambda^2+1)^2=0$$

und besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$. $\quad \lambda^2=-1$

Ein Fundamentalsystem ist daher $\quad$ FS (komplex) $e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos t & \qquad y_3(t) &= t \cdot \cos t \\ y_2(t) &= \sin t & \qquad y_4(t) &= t \cdot \sin t \end{aligned}$$

- Die homogene Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$ besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 1$.

Die allgemeine Lösung ist daher

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 te^t$$

Ein Beispiel für eine inhomogene Gleichung.

Wir betrachten die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$$

$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$

Bei der Variation der Konstanten verwenden wir den Ansatz

$$y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$$

$Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{pmatrix}$

Gelöst werden muss dann das DGL–System

$Y(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = h(t)$, $\hat{=}$

$$\left.\begin{aligned} \underline{c_1'e^t} + \underline{c_2'te^t} &= 0 \\ \underline{c_1'e^t} + c_2'(1+\underline{t)e^t} &= \frac{e^t}{t^2} \end{aligned}\right\}$$

$c_1' = -c_2' t = -\frac{1}{t}$

$c_2' = \frac{1}{t^2}, \quad c_2 = -\frac{1}{t}$

Man berechnet direkt

$$c_1(t) = -\ln|t| \qquad c_2 = -\frac{1}{t}$$

und eine spezielle Lösung ist daher

$$y_p(t) = -\Big(\ln|t| + 1\Big)e^t$$

Noch einmal das Beispiel.

Wir betrachten wieder die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$$

$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$

$y_h(1) = c_1 e + c_2 e = 0$

$y_h'(1) = c_1 e + c_2 2e = 1$

$c_2 e = 1$

$c_1 = -c_2 = -\frac{1}{e} \quad c_2 = \frac{1}{e}$

$w(t) = e^{t-1}(t-1)$

und verwenden die Methode der Greenschen Funktion:

Die Lösung von

$$w'' - 2w' + w = 0, \quad w(1) = 0, \quad w'(1) = 1$$

ist gegeben durch $w(t) = (t-1)e^{t-1}$. Also gilt für die Greensche Funktion

$$G(t, \tau) = w(t - \tau + 1) = (t - \tau)e^{t-\tau}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_1^t (t - \tau)e^{t-\tau} \overbrace{\frac{e^\tau}{\tau^2}}^{h(\tau)} d\tau = e^t \int_1^t \frac{(t-\tau)}{\tau^2} d\tau = \ldots - \\ &= e^t(-1 + t - \ln|t|) \end{aligned}$$

Spezieller Ansatz bei spezieller Inhomogenität.

Bei Inhomogenitäten der Form

$$h(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{m} \beta_j t^j$$

kann man spezielle Ansätze zur Bestimmung von $y_p(t)$ verwenden:

- Ist μ keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung $p(\lambda)$, so ist eine spezielle Lösung mit den freien Parametern γ_j

$$y_p(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{m} \gamma_j t^j$$

- Ist μ eine r-fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so ist eine spezielle Lösung

$$y_p(t) = e^{\mu t} t^r \sum_{j=0}^{m} \gamma_j t^j$$

$L[y] = h$

homogen:

i) über System

ii) Reduktionsverf. (falls 1 Lsg bekannt)

iii) sp. Ansatz (konst. Koeffizienten)
charakt. Polynom

inhomogen

i) V. d. Konst.

ii) Greensfkt (Konst. Koeff.)

iii) Ansatz (Konst Koeffizienten $\wedge$ $h(t) = e^{\lambda t} p(t)$)

Ein Beispiel mit spezieller Inhomogenität.

Wir betrachten die Gleichung $\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$

$$y'' - y = te^t \quad \mu = 1 \text{ ist einfache NS}$$

Die charakteristische Gleichung ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ und $\mu = 1$ ist eine einfache Nullstelle.

Ansatz:

$$y_p(t) = e^t(\gamma_0 t + \gamma_1 t^2) = e^t t^1 (\gamma_0 + \gamma_1 t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + (\gamma_0 + 4\gamma_1)t + \gamma_1 t^2)e^t - (\gamma_0 t + \gamma_1 t^2)e^t = te^t$$

Umsortieren liefert

$$(2\underbrace{(\gamma_0 + \gamma_1)}_{=0} + 4\gamma_1 t)e^t = te^t$$

Daraus folgt $\gamma_0 = -\gamma_1 = -1/4$ und

$$y_p(t) = \frac{t}{4}(t-1)e^t$$

Das Superpositionsprinzip und komplexe Differentialgleichungen.

Superpositionsprinzip Gegeben sei eine inhomogene DGL der Form

$$L[y_1]+L[y_2] \overset{\text{lin.}}{=} L[y_1+y_2] = L[y] = h(t) = h_1(t) + h_2(t) \tag{2}$$

Sind $y_1(t)$ und $y_2(t)$ spezielle Lösungen von $L[y] = h_1(t)$ und $L[y] = h_2(t)$, so ist $y_p(t) := y_1(t) + y_2(t)$ eine spezielle Lösung von (2).

Komplexe Differentialgleichungen

Ist $h(t)$ der Real– oder Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion $w(t)$,

$$\boxed{h(t) = \mathrm{Re}\,(w(t))} \quad \text{bzw.} \quad h(t) = \mathrm{Im}\,(w(t))$$

und ist $z(t)$ eine komplexe Lösung von $\boxed{L[z] = w,}$ so ist $\quad \mathrm{Re}\,L[z] = L[\mathrm{Re}\,z] = \mathrm{Re}\,w = h$

$$y(t) = \mathrm{Re}\,(z(t)) \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \mathrm{Im}\,(z(t))$$

eine reelle Lösung der Differentialgleichung $L[y] = h(t)$.

Beispiel zum Superpositionsprinzip und komplexer Differentialgleichung.

Ein spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + 2y' + 5y = \overbrace{\underbrace{e^{-t}\Big(\cos t}_{h_1} + \sin(2t)}^{h_2}\Big)$$

ist gegeben durch

$$y_p(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{4}t\cos(2t)\right)$$

- Beim Superpositionsprinzip betrachtet man die beiden Gleichungen

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= e^{-t}\cos t = \mathrm{Re}\left(e^{+(-1+i)t}\right) \\ y'' + 2y' + 5y &= e^{-t}\sin(2t) = \mathrm{Im}\left(e^{(-1+2i)t}\right) \end{aligned}$$

- Beide Gleichungen löst man durch Übergang auf komplexe Zahlen:

$$z'' + 2z' + 5z = e^{(-1+i)t} \quad \text{bzw.} \quad e^{(-1+2i)t}$$

Darstellung von Lsg.

$\boxed{n=1}$ $y' = f(y,t)$

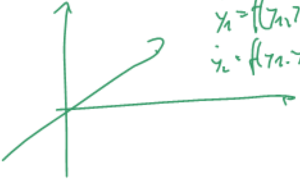
$y' = f(y)$

Projektion

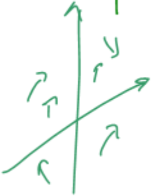
$y' = y(1-y)$

$\dot y_1 = f_1(y_1, y_2, t)$
$\dot y_2 = f_2(y_1, y_2, t)$

$\boxed{n=2}$



$\dot y_1 = f(y_1, y_2)$
$\dot y_2 = f(y_1, y_2)$



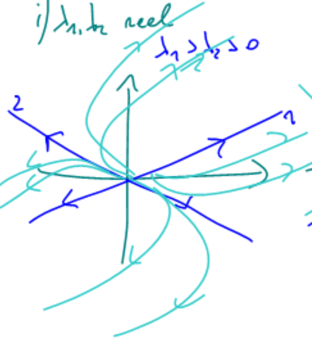
Phasenportrait
(eben 2dim)
autonom

$$\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

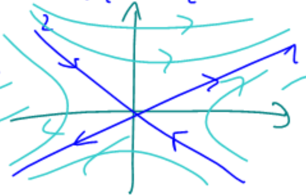
$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix} = 0$$

i) λ_1, λ_2 reell

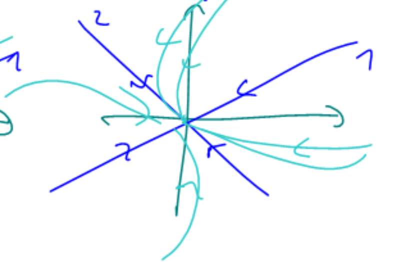
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$



$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$



$0 > \lambda_1 > \lambda_2$



$\bar\lambda_1 = \lambda_2$

$\mathrm{Re}\,\lambda_1 > 0$

$\mathrm{Re}\,\lambda_1 = 0$

$\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0$

Romeo und Julia

r $\quad >0$ Zuneigung

j $\quad <0$ Abneigung

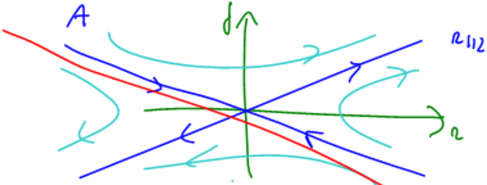
$a>0,\ b>0$

$$\begin{pmatrix}\dot r\\ \dot j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aj \\ br\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0&a\\b&0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} r\\ j\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - ab = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{ab}$$

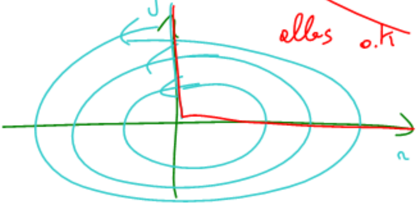
$$e_{1,2} = \begin{pmatrix} a \\ \pm\sqrt{ab}\end{pmatrix}$$



alles o.k

$$\begin{pmatrix}\dot r\\ \dot j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aj \\ br\end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-ab} = \pm i\sqrt{ab}$$



2