1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

allgemein $y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$ skalar!!

Typ A: Gegeben sei eine Gleichung zweiter Ordnung der Form

$$y''(t) = f(t, y'(t))$$

Beachte: die rechte Seite der DGL hängt nicht von $y(t)$ ab.

Setzen wir $z(t) := y'(t)$, so erhalten wir eine Gleichung erster Ordnung:

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

Läßt sich diese Gleichung lösen, so folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau$$

Ein Beispiel zu Typ A.

Die sogenannte Kettenlinie ist die Lösung der Gleichung

zusätzlich autonom

$$y''(t) = k\sqrt{1+(y'(t))^2} = f(y'(t))$$

Die Subtitution $z(t) := y'(t)$ ergibt die Gleichung erster Ordnung

$$z'(t) = k\sqrt{1+z^2(t)} = f(z(t)) \cdot \underbrace{g(t)}_{1}$$

Mittels Trennung der Variablen findet man

sinh /

$$\operatorname{arsinh} z = \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2(t)}} = k\int dt = kt + c_1$$

$$\left(k = \frac{\rho}{F_h}\right)$$

und daher

$$y'(t) = z(t) = \sinh(kt + c_1)$$

mit der Integrationskonstanten c_1.

Integration von $z(t)$ ergibt die Kettenlinie $y(t)$ in der Form

$$y(t) = \frac{1}{k}\cosh(kt+c_1) + c_2$$

1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Typ B: Gegeben sei eine autonome Gleichung zweiter Ordnung

$$y''(t) = f(y(t), y'(t))$$

Nimmt man an, dass die Lösung auf einem Intervall streng monoton ist, so existiert die Umkehrabbildung $t = t(y)$ und

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y'(t(y))}$$

Die Substitution $v(y) := y'(t(y))$ ergibt die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\boxed{\frac{dv}{dy}} = y''(t(y)) \cdot \frac{dt}{dy} = \boxed{\frac{1}{v(y)} f(y, v(y))}$$

Ist die Lösung $v(y)$ bekannt, so erhält man $y(t)$ durch Auflösen von

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{v(y)}$$

$$y'' = -y \Rightarrow \dots = \frac{dv}{dy} = \frac{-y}{v}$$

$$v\,dv = -y\,dy \qquad \frac{v^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{c^2}{2}$$

$$v = \sqrt{c^2 - y^2}$$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} = \frac{1}{\sqrt{c^2-y^2}} \Rightarrow dt = \frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$$

$$t - t_0 = \arcsin \frac{y}{c}, \quad y = c \sin(t - t_0)$$

1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Typ C: Betrachte den Spezialfall einer autonomen Gleichung der Form

$$y''(t) = f(y(t))$$

Man berechnet

$$\left(\frac{y'^2}{2}\right)' = y'y'' = f(y)y' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(y')^2 = \int f(y)dy =: F(y) + C$$

$$\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{2(F(y)+C)}$$

Die Funktion $y(t)$ sei auf einem gewissen Bereich invertierbar

$$\frac{dt}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(F(y)+C)}}$$

Dann erhält man $y(t)$ durch Auflösen von

$$t = t(y) = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2(F(y)+C)}}$$

Kapitel 2. Theorie der Anfangswertaufgaben

Wir betrachten in diesem Abschnitt stets das Anfangswertproblem

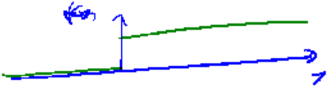
$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) & = & \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

mit der rechten Seite $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, definiert auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, und dem Anfangswert $\mathbf{y}_0 \in D$.

Die Fragen, die wir beantworten wollen, sind

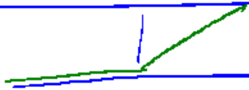
1. Existiert eine Lösung $\mathbf{y}(t)$ in einer Umgebung $|t - t_0| < \varepsilon$ der Anfangszeit?
2. Ist die Lösung, falls sie existiert, eindeutig bestimmt?
3. Wie weit lässt sich die Lösung in der Zeit fortsetzen?
4. Wie verändert sich die Lösung bei einer Störung der Anfangsdaten $(t_0, \mathbf{y}_0)$ oder der rechten Seite $f(t, \mathbf{y})$?

$y' = f(y)$ $\qquad f(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ 1 & y>0 \end{cases}$



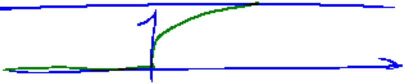
∄ Lsg. welche $y=0$ trifft.

$y' = f(y)$

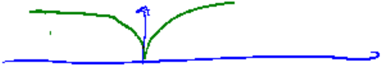


✓

$y' = f(y)$



$y' = \sqrt{|y|}$



$y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 1$, nahe $y=1$ ist $\sqrt{|y|} = \sqrt{y}$

$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dt$ $\qquad 2(\sqrt{y} - \sqrt{y_0}) = t - t_0$ $\qquad y(t) = \left(\sqrt{y_0} + \frac{t}{2}\right)^2$

falls $y(0) = 0$ $\quad y' = \sqrt{|y|}$ $\qquad y(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2$

aber $y = 0$ ist auch Lsg

2.1 Existenz und Eindeutigkeit für Anfangswertaufgaben

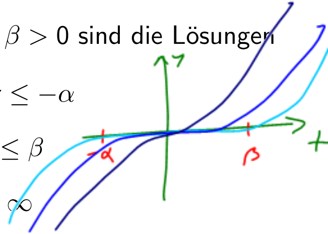
Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \qquad y(0) = 0$$

Diese Gleichung besitzt beliebig viele Lösungen. Für $\alpha, \beta > 0$ sind die Lösungen

$$y'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(t+\alpha) \\ 0 \\ \frac{1}{2}(t+\beta) \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t+\alpha)^2 & : \quad -\infty < t \leq -\alpha \\ 0 & : \quad -\alpha < t \leq \beta \\ \frac{1}{4}(t+\beta)^2 & : \quad \beta < t < \infty \end{cases}$$

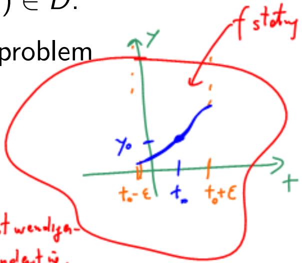


Man beachte die folgenden Eigenschaften der rechten Seite.

1. Die rechte Seite ist stetig und beschränkt auf $D = \mathbb{R} \times [-a, a]$, $a > 0$,
2. Die rechte Seite ist auf D nicht Lipschitz–stetig,
3. Die rechte Seite ist bei $y = 0$ nicht differenzierbar.

Der Existenzsatz von Peano.

Satz: (Existenzsatz von Peano (1890)) Die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sei auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und es gelte $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$.



Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

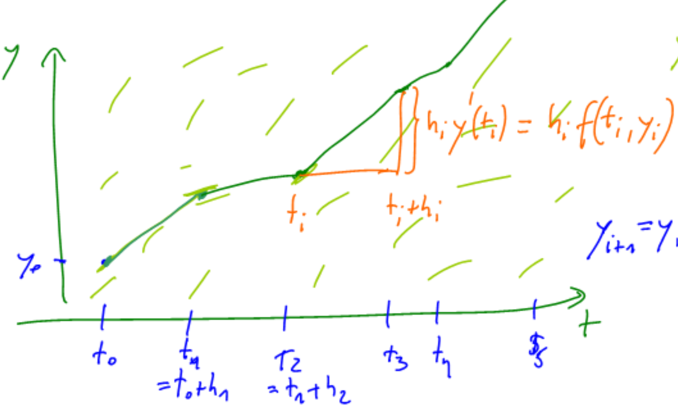
im Intervall $|t - t_0| < \varepsilon$ eine Lösung besitzt. nicht notwendigerweise eindeutig.

Konstruktiver Beweis mittels des Eulerschen–Polygonzug–Verfahrens:
Rekursive Berechnung einer (diskreten) Näherungslösung

$$t_{i+1} := t_i + h_i, \qquad \mathbf{y}_{i+1} := \mathbf{y}_i + h_i f(t_i, \mathbf{y}_i)$$

mit den Startwerten $(t_0, \mathbf{y}_0)$ und den Schrittweiten h_i.
Näherungslösungen **konvergieren** gegen eine Lösung für $h_i \to 0$.

$y' = f(t,y)$



$$y_{i+1} = y_i + h_i\, f(t_i, y_i)$$

Peano $\quad (h_i \to 0)$

Euler Polygonzugverfahren $\quad h = const$

$y' = \sqrt{|y|} \quad y(0) = 0$

$y^0 = y_0 = 0$

$y^1 = y^0 + h f(y_0) = y^0 + h\sqrt{|y_0|} = 0 + 0 = 0 \quad \rightarrow y^n = 0$

$y^2 = y^1 + h f(y^1) = y^1 + h\sqrt{|y^1|} = 0 + 0 = 0$

$y' = y \quad y(t_0) = y_0 \qquad t_n = t_0 + nh \qquad h = \frac{t_n - t_0}{n}$

$y^0 = y_0$

$y^1 = y^0 + h f(y^0) = y^0 + h y^0 = y^0(1+h)$

$y^2 = y^1 + h y^1 = y^1(1+h) = y^0(1+h)^2$

$y^n = y^0(1+h)^n = y^0\left(1 + \frac{t_n - t_0}{n}\right)^n \longrightarrow \boxed{y e^{t_n - t_0}}$

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} e^x$