Bisher: skalar

·) Trennung d. Var. $\quad y' = f(y)\, g(t)$

·) Ähnlichkeit $\quad y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$

·) linear. Gl. $\quad y'(t) + a(t)\, y(t) = h(t)$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau} + \int_{t_0}^{t} h(\tau)\, e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds}\, d\tau\; e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau}$$

<u>Partikulärlsg.</u>: Methode 1: Variation d. Konst. (allgem.)

Methode 2: spezielle Ansätze

Methode 3: raten

II. Berechnung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

(allgemein, aber i.A. mühsam)

Dazu verwendet man die Methode der Variation der Konstanten

Ansatz (Versuch)

$$y_p(t) = C(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)$$

gesucht!!

Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\overbrace{C'(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) - \cancel{a(t)y_p(t)}}^{y_p'} + \overbrace{\cancel{a(t)y_p(t)}}^{+\,a y_p} = h(t) \quad = h$$

Durch Integration der Differentialgleichung für $C(t)$ erhalten wir

$$C'(t) = h(t)\exp\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} h(\tau) \cdot \exp\left(+\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi\right) d\tau$$

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} h(\tau) \exp\left[\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi\right] d\tau \; \exp - \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$

Spezialfälle zur Berechnung einer speziellen Lösung.

Für lineare Gleichungen der Form

Spezialfall: a = constant
h speziell

$$y'(t) + a \cdot y(t) = h(t) \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

und speziellen Inhomogenitäten $h(t)$ macht man folgende Ansätze:

Inhomogenität $h(t)$	Ansatz für $y_p(t)$
$\sum_{k=0}^{m} b_k t^k$	$\sum_{k=0}^{m} c_k t^k$
$b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)$	$c \sin(\omega t - \gamma)$
$be^{\lambda t}$	$ce^{\lambda t}$ für $\lambda \neq -a$ $cte^{\lambda t}$ für $\lambda = -a$

Fall: $a = \text{const.}$, $h(t) = b e^{\lambda t}$

Var. d. Konst.

$$\int_{t_0}^{t} h(\tau)\, e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds}\, d\tau \; e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} = b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda\tau} e^{a(\tau - t_0)}\, d\tau \; e^{-a(t-t_0)} = (*)$$

für $\lambda + a \neq 0$

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds = a(t - t_0)$$

$$(*) = b\, \cancel{e^{-at_0}} \frac{1}{\lambda + a} e^{(\lambda+a)\tau}\Big|_{t_0}^{t} e^{-at} \cancel{e^{+at_0}} = \frac{b}{\lambda+a}\left(e^{(\lambda+a)t} - e^{(\lambda+a)t_0}\right) e^{-at}$$

$$= \underbrace{\frac{b}{\lambda+a} e^{\lambda t}}_{\text{Partikuläre Ls}} - \underbrace{\frac{b}{\lambda+a} e^{-at} e^{(\lambda+a)t_0}}_{\text{Lsg. d. homogenen Gl.}}$$

Ein Beispiel für einen solchen Spezialfall.

Wir betrachten die Differentialgleichung $a=1$, $w=1$

$$y'(t) + y(t) = \sin t$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$\boxed{y_h(t) = C \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} 1 \, d\tau\right) = C \cdot \exp\left(t_0 - t\right)}$$

Bei der Variation der Konstanten ist der Ansatz

$$y_p(t) = \underline{C(t)} \cdot \exp\left(t_0 - t\right)$$

Ein Einsetzen des Ansatzes ergibt schließlich

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \sin(\tau) \cdot \exp\left(\tau - t_0\right) d\tau = \begin{cases} \text{zweimal partiell} \\ \text{im Komplexe} \end{cases}$$

$$= \operatorname{Im}\left\{ \int_{t_0}^{t} e^{i\tau} e^{\tau} e^{-t_0} \, d\tau \right\}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Nach der Tabelle auf Seite 24 suchen wir eine spezielle Lösung der Form

$$y_p(t) = C\sin(\overset{\omega=1}{t} - \gamma) \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Ein Einsetzen von $y_p(t)$ in die Differentialgleichung ergibt

$$\overset{y_p'(t)}{C\cos(t-\gamma)} \overset{+}{+} \overset{y_p(t)}{C\sin(t-\gamma)} = \sin t$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme folgt

$$C(\underline{\cos t}\cos\gamma + \underline{\sin t}\sin\gamma) + C(\underline{\sin t}\cos\gamma - \underline{\cos t}\sin\gamma) = \underline{\sin t}$$

Wir erhalten also

$$C\,\underline{\cos t}\,\underbrace{(\cos\gamma - \sin\gamma)}_{=0} + C\,\underline{\sin t}\,\underbrace{(\sin\gamma + \cos\gamma)}_{1/C} = \underline{\sin t}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Daraus folgt

$$\gamma = \pi/4 \qquad \text{und} \qquad C = 1/\sqrt{2}$$

Typ D: Bernoullische Differentialgleichungen.

Bernoullische Differentialgleichungen sind von der Form

nicht linear

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)(y(t))^{\alpha} = 0 \qquad \text{mit } \alpha \neq 0, 1$$

inhomogen linear — homogen linear

Sie lassen sich mit der Substitution

$$u(t) := (y(t))^{1-\alpha}$$

$\cdot(1-\alpha)y^{-\alpha}$

stets auf lineare Differentialgleichungen zurückführen:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}\,y' + (1-\alpha)\,a\,y^{1-\alpha}\,y + b\,(1-\alpha)\,y^{-\alpha}\,y^{\alpha} = 0$$

linear

$$u'(t) + (1-\alpha)a(t)u(t) = (\alpha - 1)b(t)$$

Probleme ergeben sich bei der Rücksubstitution

$$y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Zum Beispiel kann $y(t)$ (in endlicher Zeit) singulär werden.

Ein Beispiel für eine Bernoullische Differentialgleichung.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t) + ty^2(t)$$

$\alpha = 2 \qquad u = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y}$

$a = -1$
$b = -t$

Die Substitution $u(t) = 1/y(t)$ ergibt

$$\boxed{u'(t) + u(t) = -t}$$

Ansatz: $u_p(t) = a_0 + a_1 t$

$u_p' + u_p = a_1 + a_0 + a_1 t \overset{!}{=} -t$

$\Rightarrow a_1 = -1, \; a_0 = 1$

$u_p(t) = 1 - t$

Die allgemeine Lösung $u(t)$ lautet dann

$$u(t) = \underbrace{C \cdot e^t}_{\text{allg. Lsg. homog. Glchg.}} + \underbrace{1 - t}_{\text{spez. Lsg. inhomog. Glchg.}}$$

Nach Rücksubstitution erhalten wir die allgemeine Lösung $y(t)$ in der Form

$$y(t) = \frac{1}{1 - t + C \cdot e^t} \qquad \text{mit der Konstanten } C$$

Mit $y(0) = 2$ existiert die Lösung nur auf dem Intervall $[-1.6783\ldots, 0.7680\ldots]$.

Typ E: Riccatische Differentialgleichungen.

Riccatische Differentialgleichungen sind von der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t)$$

nicht linear

Sie lassen sich nur in speziellen Fällen in geschlossener Form lösen:

Ist eine spezielle Lösung $y_p(t)$ bekannt, so liefert die Substitution

$$u(t) := \frac{1}{y(t) - y_p(t)}$$

beziehungsweise

$$y(t) = y_p(t) + \frac{1}{u(t)}$$

linear

die lineare Gleichung

$$u'(t) - [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u(t) = b(t)$$

Ein Beispiel für eine Riccatische Differentialgleichung.

Wir betrachten die Gleichung

$c(t)$

$$y'(t) = -2t + 3ty(t) - ty^2(t),$$

die $y_p(t) = 1$ als spezielle Lösung besitzt.

Die Substitution $\boxed{u(t) = 1/(y(t) - 1)}$ bzw. $\boxed{y(t) = 1 + 1/u(t)}$ liefert

$$\begin{aligned} \boxed{u'(t)} &= -u^2y' = -u^2(-2t + 3ty(t) - ty^2(t)) \\ &= -u^2\left(-2t + 3t + \frac{3t}{u} - t - \frac{2t}{u} - \frac{t}{u^2}\right) = \boxed{-tu(t) + t} \end{aligned}$$

$u_h(t) = c\, e^{-\int_{t_0}^{t} \tau\, d\tau} = c e^{-\frac{t^2}{2}}$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Gleichung ist

$$u(t) = \underbrace{1}_{\substack{u_p \\ \text{geraten}}} + \underbrace{C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}_{u_h}$$

und daher gilt

$$y(t) = 1 + \frac{1}{1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$$

Typ F: Exakte Differentialgleichungen.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\boxed{g(t, y(t)) + h(t, y(t))\, y'(t) = 0}$$

falls $h(t, y(t)) \neq 0$ explizit $y' = -\frac{g(t, y(t))}{h(t, y(t))}$

Definition: Existiert eine Funktion $\Phi(t, y)$ mit

$$\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial t} = g(t, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y} = h(t, y),$$

so nennt man die Differentialgleichung $g + hy' = 0$ exakt.

Dann folgt

$$\frac{d\Phi(t, y(t))}{dt} = \overbrace{\frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial y}\, y'(t)}^{= g + h y' =} = 0$$

und die Lösungen der Gleichung sind gegeben durch

$$\Phi(t, y(t)) = C \in \mathbb{R}$$

$y' = -\frac{y}{t} \iff \underbrace{y}_{g=g(y)} + \underbrace{t}_{h=h(t)} y' = 0$

$\phi(t,y) = t \cdot y \qquad g = \phi_t \qquad h = \phi_y \qquad$ exakt!

Lösung: $\phi(t, y(t)) = c \qquad t \cdot y(t) = c \Rightarrow y(t) = \frac{c}{t}$

---

falls $g = \phi_t$, $h = \phi_y$ (also exakt) $\Rightarrow \boxed{g_y = \phi_{ty} = \phi_{yt} = h_t}$

$\nexists\, \phi \Leftarrow$ falls $g_y \neq h_t$

Analysis III: Integrabilitätsbedingung bei Vektorfeldern.

Definieren wir ein Vektorfeld $F(t,y)$ durch

$$F(t,y) := (g(t,y), h(t,y))^T,$$

so heißt Differentialgleichung exakt, falls F ein Potential besitzt:

$$g(t,y) = \Phi_t(t,y), \quad h(t,y) = \Phi_y(t,y) \qquad \Phi \in \mathcal{C}^1$$

Dies geht nur mit einer zusätzlichen Eigenschaft des Potentials F, der Integrabilitätsbedingung

Satz: Sind die beiden Funktionen $g(t,y)$ und $h(t,y)$ stetig differenzierbar und ist der Definitionsbereich einfach zusammenhängend, so besitzt das Vektorfeld F ein Potential Φ genau dann, wenn im Definitionsbereich die Bedingung

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(t,y)}$$

erfüllt ist.

Berechnung des Potentials einer exakten DGL.

Das Potential $\Phi(t, y)$ einer exakten Differentialgleichung kann mit Kurvenintegralen berechnet werden:

$$\Phi(t, y) = \int_{c_{(t,y)}} F(\tau, \eta) d(\tau, \eta)$$

Dabei ist $c_{(t,y)}$ eine $\mathcal{C}^1$–Kurve, die den festen Punkt (t_0, y_0) mit dem variablen Punkt (t, y) verbindet.

Beispiel: Im Zweidimensionalen ($D = \mathbb{R}^2$) kann man den Hakenweg

$$(t_0, y_0) \quad \to \quad (t, y_0) \quad \to \quad (t, y)$$

wählen und erhält für das Potential die Darstellung

$$\boxed{\Phi(t, y) = \int_{t_0}^{t} g(\tau, y_0) d\tau + \int_{y_0}^{y} h\cancel{g}(t, \eta) d\eta}$$

$$\phi(t,y) = \int_{t_0}^{t} g(\tau,y_0)\,d\tau \quad \int_{y_0}^{y} h(t,\eta)\,d\eta$$

$$\phi_y(t,y) = h(t,y) \quad \checkmark$$

1.B

$$\phi_t(t,y) = g(t,y_0) + \int_{y_0}^{y} h_t(t,\eta)\,d\eta \underbrace{=}_{h_t = g_y} g(t,y_0) + \int_{y_0}^{y} g_y(t,\eta)\,d\eta =$$

$$= \cancel{g(t,y_0)} + g(t,y) - \cancel{g(t,y_0)} = g(t,y) \quad \checkmark$$

Ein Beispiel für eine exakte Differentialgleichung.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\underbrace{(1+2ty+y^2)}_{g} + \underbrace{(t^2+2ty)}_{h}y' = 0 \qquad (\,(t,y) \in \mathbb{R}^2\,)$$

Es gilt

$$\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}(t^2+2ty)}^{h_t} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial y}(1+2ty+y^2)}^{g_y} = 2(t+y)$$

und die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt, d.h. die Gleichung ist exakt.

Erster Schritt zur Berechnung des Potentials

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \overset{!}{=} g = 1 + 2ty + y^2$$

Eine Integration bezüglich t ergibt

$$\Phi(t,y) = t(1+y^2) + t^2 y + C(y)$$

Beachte: Integrationskonstante kann von y abhängen!

Fortsetzung des Beispiels.

Nach dem ersten Schritt gilt

$$\Phi(t, y) = t(1 + y^2) + t^2 y + C(y)$$

Zweiter Schritt: Die Funktion $C(y)$ kann aus der Integrabilitätsbedingung bestimmt werden.

Es muss gelten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \stackrel{!}{=} h = t^2 + 2ty$$

Einsetzen des Ergebnisses aus dem ersten Schritt liefert

$$2ty + t^2 + C'(y) = t^2 + 2ty \quad \Rightarrow \quad C(y) = \text{ const.}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch die implizite Gleichung

$$\phi(t, y(t)) = t(1 + y^2(t)) + t^2 y(t) = C$$

Die Methode des integrierenden Faktors.

Gegeben sei die nicht exakte Differentialgleichung

$$g(t, y) + h(t, y)\, y' = 0$$

Wir suchen nun eine Funktion $m(t, y)$ so, dass die Gleichung

Wähle m so, dass

$$\underbrace{m(t, y)g(t, y)}_{\tilde{g}} + \underbrace{m(t, y)h(t, y)}_{\tilde{h}}\, y' = 0 \qquad \tilde{g}_y = \tilde{h}_t$$

eine exakte Differentialgleichung ist.

Bedingung: Die Integrabilitätsbedingungen müssen erfüllt sein, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{m \cdot h}_{\tilde{h}}) - \frac{\partial}{\partial y}(\underbrace{m \cdot g}_{\tilde{g}}) = 0$$

Daraus ergibt sich die Bedingung:

$$\left(h\frac{\partial m}{\partial t} - g\frac{\partial m}{\partial y} \right) + m\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0$$

Zwei einfache Sonderfälle.

Die Bedingung

$$\left(h\frac{\partial m}{\partial t} - g\frac{\partial m}{\partial y}\right) + m\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0$$

wird in den beiden folgenden Spezialfällen deutlich einfacher.

- 1. Fall: Wir nehmen an, dass $m = m(t)$ nur von t abhängt. $\frac{\partial m}{\partial y} = 0$

$$\frac{dm}{dt} = - \underbrace{\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)/h\right]}_{\text{Bed.: hängt nur von } t \text{ ab}} \cdot m(t)$$

- 2. Fall: Wir nehmen an, dass $m = m(y)$ nur von y abhängt. $\frac{\partial m}{\partial t} = 0$

$$\frac{dm}{dy} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)/g\right]}_{\text{Bed.: hängt nur von } y \text{ ab}} \cdot m(y)$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\frac{\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)}{h} \cdot m(t)$$

$$\underbrace{\frac{\frac{dm(t)}{dt}}{m(t)}} = -\underbrace{\frac{\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}}{h}}$$

nur t abhängig $\Rightarrow$ darf nicht von y abhängig

Beispiel mit integrierendem Faktor.

Gegeben sei die nicht exakte Gleichung

$-t = g_y \neq h_t = y - 2t$

$$\underbrace{(1-ty)}_{g} + \underbrace{(ty-t^2)}_{h}y' = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{t}$$

Es gilt:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)/h = \frac{y-t}{ty-t^2} = \frac{1}{t}$$

Unser Ansatz lautet

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{t}\cdot m(t) \quad \Rightarrow \quad m(t) = \frac{1}{t}$$

Damit ist die Differentialgleichung

$-1 = \tilde{g}_y = \tilde{h}_t = -1$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{t} - y\right)}_{\tilde{g}} + \underbrace{(y-t)}_{\tilde{h}}y' = 0 \qquad (t \neq 0)$$

$\Phi_t = \tilde{g} = \frac{1}{t} - y, \quad \Phi(t) = \ln|t| - ty + C(y)$

exakt und die (implizite) Lösung ist gegeben durch

$\Phi_y = -t + C'(y) = \tilde{h} = y - t$

$C'(y) = y \Rightarrow C(y) = \frac{y^2}{2}$

$$\Phi(t, y(t)) = \ln|t| - ty(t) + \frac{1}{2}y^2(t) = \text{ const.}$$

1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung allgemein $y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$

Typ A: Gegeben sei eine Gleichung zweiter Ordnung der Form

$$y''(t) = f(t, y'(t))$$

Beachte: die rechte Seite der DGL hängt nicht von $y(t)$ ab.

Setzen wir $z(t) := y'(t)$, so erhalten wir eine Gleichung erster Ordnung:

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

Läßt sich diese Gleichung lösen, so folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau$$

Ein Beispiel zu Typ A.

Die sogenannte Kettenlinie ist die Lösung der Gleichung

$$y''(t) = k\sqrt{1 + (y'(t))^2}$$

Die Subtitution $z(t) := y'(t)$ ergibt die Gleichung erster Ordnung

$$z'(t) = k\sqrt{1 + z^2(t)}$$

Mittels Trennung der Variablen findet man

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2(t)}} = k \int dt$$

und daher

$$z(t) = \sinh(kt + c_1)$$

mit der Integrationskonstanten c_1.

Integration von $z(t)$ ergibt die Kettenlinie $y(t)$ in der Form

$$y(t) = \frac{1}{k}\cosh(kt + c_1) + c_2$$