Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Skript auf Grundlage der entsprechenden nach Vorlesung von Prof.Dr. Jens Struckmeier
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2011/12

ad Klausur: 20% Verständnisfragen
80% Übungsähnliche Aufgaben

Literatur: Ansorge-Oberle
Haf, Wille, Meister ...

Sprechstunde: Raum 3079, Mo 13-13:45

Inhalte der Vorlesung Differentialgleichungen I.

1. Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen.
2. Elementare Lösungsmethoden.
3. Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertaufgaben.
4. Lineare Systeme 1. Ordnung, Systeme mit konstanten Koeffizienten.
5. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung.
6. Laplace–Transformation bei Differentialgleichungen.
7. Stabilität von Lösungen.
8. Randwertaufgaben, Variationsrechnung.
9. Numerische Verfahren für Anfangswertaufgaben.
10. Numerische Verfahren für Randwertaufgaben.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{gesucht}$$

1.1 Einführung und Beispiele

Definition: Ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

mit

$$\mathbf{F} : \underbrace{[a, b]}_{\text{meist } [0,\infty)} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{\text{(m+1)–fach}} \to \mathbb{R}^n$$

heißt implizites gewöhnliches Differentialgleichungssystem der Ordnung m.

$t \in \mathbb{R}$

Läßt sich das System nach $\mathbf{y}^{(m)}(t)$ auflösen, so ergibt sich das explizite System der Form:

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Im Folgenden suchen wir stets eine $\mathcal{C}^m$–Funktion m mal stetig diff bar

$$\mathbf{y} : [a, b] \to \mathbb{R}^n,$$

die das Differentialgleichungssystem erfüllt: für $t \in [a, b]$ gilt also

implizit

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

beziehungsweise

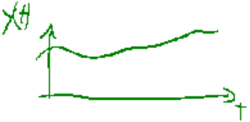
explizit

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Spezialfall: Hängen die Funktionen **F** bzw. **f** nicht explizit von (der Zeit) t ab, so nennt man das System autonom, d.h.

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

z.B n=1



oder

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Lösungen nennt man dann auch Trajektorien der DGL.

Autonome DGL, Anfangswert– und Randwertaufgabe.

Beispiel: Die skalare autonome Gleichung erster Ordnung

skalar (kein System)
Ordnung 1
explizit
autonom

$$y'(t) = y(t)$$

hat auf jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen der Form

$$y(t) = C \cdot e^t \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

Anfangswertaufgabe (für ein $t = a$ wird die Lösung vorgegeben)

System
explizit
Ordnung 1
nicht autonom

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= f(t, \mathbf{y}(t)),\ a \le t \le b,\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y}(a) &= \mathbf{y}_a \qquad \text{(Anfangswert)} \end{cases}$$

Randwertaufgabe (für zwei Werte $t = a \wedge t = b$ wird Lsg. vorgegeben)

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= f(t, \mathbf{y}(t)),\ a \le t \le b,\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) &= 0 \qquad \text{(Randwert)} \end{cases}$$

Beispiele

i) $y'(t) = 0 \Rightarrow y(t) = c$

$y(t) = 7$

AB: $y(2) = 7 \Rightarrow c = 7$

RB $y(2) = 7$, $y(7) = 10$

nicht lösbar

ii) $y''(t) = 0 \Rightarrow y(t) = c_1 t + c_0$ $\quad y'(t) = c_1$

AB: $y(0) = 1$ $\quad c_0 = 1$

$y'(0) = 2$ $\quad c_1 = 2$

$\boxed{y(t) = 2t + 1}$

RB: $y(0) = 1$ $\quad c_0 = 1$

$y(5) = 3$ $\quad y(5) = c_1 \cdot 5 + 1 \overset{!}{=} 3 \Rightarrow c_1 = \frac{2}{5}$

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{5} t + 1}$$

Beispiel 1: Populationsmodell I

Sei $N(t)$ die Größe einer Population, zum Beispiel Bakterien auf einem Nährboden. Die Änderung der Population in kleinen Zeitabschnitten wird bestimmt durch

die Geburtenrate b und die Sterberate d.

Dann gilt

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx (b-d)N(t)$$

Im Grenzwert $\Delta t \to 0$ erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t) \quad \text{mit} \quad \alpha = b - d$$

Mit dem Anfangswert $N(t_0) = N_0$ ergibt sich die eindeutige Lösung

$$N(t) = N_0 e^{\alpha(t-t_0)} \xrightarrow{t \to \infty} \begin{cases} \infty & \alpha > 0 \\ N_0 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Die Population besitzt also ein exponentielles Wachstum.

Beispiel 2: Populationsmodell II.

Bei exponentiellem Wachstum gilt für $\alpha > 0$

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$$

und das ist unrealistisch (zum Beispiel: Weltbevölkerung).
Suche also ein Modell mit

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = K < \infty$$

Verhulst: Wachstumsrate ist eine mit $N(t)$ linear fallende Funktion

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)(K - N(t)) = \alpha = \alpha(N(t))$$

AB: $N(t_0) = N_0$

Die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe lautet dann

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\lambda K(t-t_0)}} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{K \cdot N_0}{N_0} = K$$

und man spricht hier vom logistischen Wachstum.

Beispiel 3: Das Regelkreisglied.

Mechanisches Feder–Dämpfer–System mit Anregung

$$\begin{aligned}
y_e(t) &= \text{vorgegebene Eingangsgröße} \\
y_a(t) &= \text{Ausgangsgröße} \\
K_F(t) &= K(y_e(t) - y_a(t)) = \text{Federkraft} \\
K_D(t) &= r\, y_a'(t) = \text{Dämpferkraft}
\end{aligned}$$

wobei K die Federkonstante und r den Dämpfungskoeffizienten bezeichnet.

Modellierung als gewöhnliche Differentialgleichung liefert

$$y_a'(t) = -\lambda y_a(t) + \lambda y_e(t) \quad \text{mit } \lambda = \frac{K}{r}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems bei Vorgabe von $y_e(t)$, $t \geq t_0$ ist

$$y_a(t) = y_a(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^{t} y_e(\tau) e^{\lambda(\tau - t)} d\tau$$

Beispiel 4: Die Newtonsche Abkühlung.

Für die Temperatur $T(t)$ eines homogenen Körpers gilt (vereinfacht) die Differentialgleichung

cmT Energiedichte

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k \cdot F}{c \cdot m}(T_a(t) - T(t))$$

Dabei ist

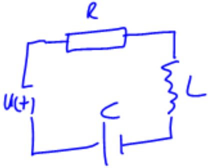
$$\begin{aligned} T_a(t) &= \text{Umgebungstemperatur} \\ m &= \text{Masse des Körpers} \\ F &= \text{Oberfläche} \\ c &= \text{spezifische Wärme} \\ k &= \text{Proportionalitätsfaktor} \end{aligned}$$

Die Gleichung ist identisch mit der des Regelkreisglieds und insbesondere gilt

$$T(t) \to T_a(t) \qquad \text{für } t \to \infty.$$

Beispiel 5: Der elektrische Schwingkreis.

Gegeben seien



der Ohmsche Widerstand R,

die Induktivität L,

die Kapazität C.

Für die Spannungsabfälle gilt

$$\boxed{U_R = R \cdot I}, \quad \boxed{U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}}, \quad \boxed{I = C \cdot \frac{dU_C}{dt}}$$

$U_R = R \cdot I = RC \frac{dU_C}{dt}$

$U_L = L \cdot \frac{dI}{dt} = LC \frac{d^2 U_C}{dt^2}$

sowie bei vorgegebener Spannung $U(t)$

$$\boxed{U_R + U_L + U_C = U(t)}$$

Wir ersetzen in U_R und U_L die Variable I durch $C \cdot dU_C/dt$, und erhalten

$$\boxed{R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2} + U_C = U(t)}$$

Scalar
2. Ordnung
explizit

Beispiel 5: Der elektrische Schwingkreis (Fortsetzung).

Der Schwingkreis wird modelliert durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$LC\,\frac{d^2U_C}{dt^2} + RC\,\frac{dU_C}{dt} + U_C = U(t)$$

Typisch ist die Vorgabe einer Wechselspannung, also $U(t) = U_0\cos(\omega t)$.

Beobachtung: Anfangswertproblem mit Vorgabe von

$$U_C(t_0) = C_1 \qquad \text{und} \qquad \frac{dU_C}{dt}(t_0) = C_2$$

Es existiert auch eine Darstellung als System erster Ordnung,

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{R}{L}\,y_2 - \frac{1}{LC}\,y_1 + \frac{1}{LC}\,U \end{aligned}$$

wobei $y_1 := U_c$ und $y_2 := dU_C/dt$.