Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2015/16**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21: (Klausuren SoSe 10 und WiSe 11/12)

Man bestimme alle stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) der Differentialgleichungssysteme

a) $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= (y_1 - 1)(y_2 - 3) \,, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y - xy \\ \dot{y} &= x - xy \,. \end{aligned}$$

und untersuche deren Stabilitätsverhalten mit (lokaler) Klassifikation.

Aufgabe 22:

Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_2 \,, \\ y_2' &= 2y_1 + 3y_1^3 \,. \end{aligned}$$

a) Man berechne alle stationären Punkte $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems.

b) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte nach Stabilitätssatz III des Lehrbuches.

c) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte mit Hilfe der Methode von Ljapunov, wobei eine Ljapunov-Funktion V in der Form $V(\boldsymbol{y}) = ay_1^2 + by_2^2 + cy_1^4$ gesucht werden soll.

Aufgabe 23:

Für die Differentialgleichung

$$y'' + 16y = 16 \quad \text{mit} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{8}$$

bestimme man die allgemeine Lösung. Damit berechne man alle Lösungen für folgende Randbedingungen:

a) $4y(0) + y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4$ und $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$,

b) $y(0) = 1$ und $y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$,

c) $y(0) + y'(0) = 0$ und $y\left(\frac{\pi}{8}\right) + y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$.

unter Verwendung der allgemeinen Lösungsdarstellung der Einzelgleichung und alternativ durch Umschreiben in ein System 1.Ordnung und dann unter Verwendung der Shooting-Matrix.

Aufgabe 24: (Klausur WiSe 2005/06)

In einer Variationsaufgabe ist das Funktional

$$I[y] = \int_0^{\pi/4} \left((y')^2 - 4y^2 + 2\right)\, dt$$

gegeben für alle C^1- Funktionen y mit $y(0) = 0$ und $y(\pi/4) = 1$.

a) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,

b) berechne die reelle Lösung der zugehörigen Randwertaufgabe und

c) berechne für die Lösung aus (ii) den Wert des Funktionals $I[y]$.

Abgabetermin: 18.1. - 22.1.2016 (zu Beginn der Übung)