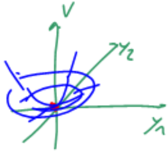
Stabilität mittels Ljapunov–Funktionen.

Wir betrachten wieder das nichtlineare **autonome** System

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \qquad \text{mit } \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Definition: Eine $\mathcal{C}^1$–Funktion $V : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt Ljapunov–Funktion auf $\bar{K}_r(\mathbf{0}) \subset D$ für $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, falls gilt



a)

$$\begin{cases} V(\mathbf{0}) = 0 \\ V(\mathbf{y}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0}) \end{cases}$$

b)

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle \leq 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0})$$

Gilt in b) sogar

b')

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle < 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{y} \text{ mit } 0 < \|\mathbf{y}\| \leq r$$

so nennt man $V(\mathbf{y})$ eine strenge Ljapunov–Funktion.

Stabilitätssatz IV mit Ljapunov–Funktionen.

Satz: (Stabilitätssatz IV)

1) Existiert eine Ljapunov–Funktion $V(\mathbf{y})$ von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, so ist die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein gleichmäßig stabiler Gleichgewichtspunkt.

2) Ist $V(\mathbf{y})$ zudem eine strenge Ljapunov–Funktion von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, so ist die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Beweisidee: Wir berechnen die Zeitableitung der Funktion $V(\mathbf{y}(t))$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(\mathbf{y}(t)) &= \operatorname{grad}(V(\mathbf{y}(t))) \cdot \mathbf{y}'(t) \\
&= \operatorname{grad}(V(\mathbf{y}(t))) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \\
&= \langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle
\end{aligned}
$$

Ist V eine (strenge) Ljapunov–Funktion, so ist $V = V(\mathbf{y}(t))$ (streng) monoton fallend.

— ist die Projektion von —

in die (y_1, y_2) Ebene

Ljapunov heißt, entlang von

— geht es nie aufwärts

Instabilität und Ljapunov–Funktionen.

Bemerkung: Wir betrachten wieder die autonome Gleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \qquad \text{mit } \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

d.h. die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist ein Gleichgewichtspunkt.

Existiert eine $\mathcal{C}^1$–Funktion $V(\mathbf{y})$ mit den Eigenschaften

$$\begin{cases} V(\mathbf{0}) = 0 \\ V(\mathbf{y}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0}) \end{cases}$$

und

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle > 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{y} \text{ mit } 0 < \|\mathbf{y}\| \leq r$$

so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

Ein Beispiel zu Ljapunov–Funktionen.

Lin

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

Wir betrachten das nichtlineare System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + y \\ \dot{y} &= -x - y^5 \end{aligned}$$

Der Nullpunkt ist ein isolierter Gleichgewichtspunkt des Systems.

Mit dem Ansatz

$$V(x, y) = ax^2 + by^2, a, b > 0$$

gilt offensichtlich

$$V(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad V(x, y) > 0 \text{ für } (x, y) \neq (0, 0)$$

Fortsetzung des Beispiels.

Weiter berechnet man

$$\begin{aligned}\langle \nabla V(x,y), \mathbf{f}(x,y)\rangle &= \langle \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3+y \\ -x-y^5 \end{pmatrix}\rangle \\ &= 2ax(-x^3+y)+2by(-x-y^5) \\ &= -2ax^4+2axy-2bxy-2by^6\end{aligned}$$

Setzt man $a = b > 0$, so folgt

$$V(x,y) = -2ax^4 - 2by^6 \quad = -2a(x^4+y^6)$$

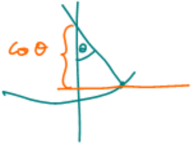
d.h. V ist eine strenge Ljapunov–Funktion und der Nullpunkt ist ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Ljapunov–Funktion für das mathematische Pendel.

Beim mathematischen Pendel

$y_1 = \theta \qquad \ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta$

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2\\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin y_1\end{aligned}$$



setzt man

$\frac{1}{2}\dot{y}_1^2$

$$V(y_1, y_2) := \frac{1}{2} y_2^2 + \omega^2 (1 - \cos y_1)$$

Damit gilt $V(0,0) = 0$ und $V(y_1, y_2) > 0$ für $(y_1, y_2) \in \bar{K}_r(\mathbf{0})$, $r < \pi$. Weiter berechnet man

$$\langle \nabla V, \mathbf{f} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \omega^2 \sin y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

Also ist V eine Ljapunov–Funktion auf $\bar{K}_r(\mathbf{0})$ und der Nullpunkt ist ein stabiler Gleichgewichtspunkt. Allerdings ist V keine strenge Ljapunov–Funktion, denn der Urspung ist auch nicht asymptotisch stabil.

math Pendel

$\dot{y}_1 = y_2$

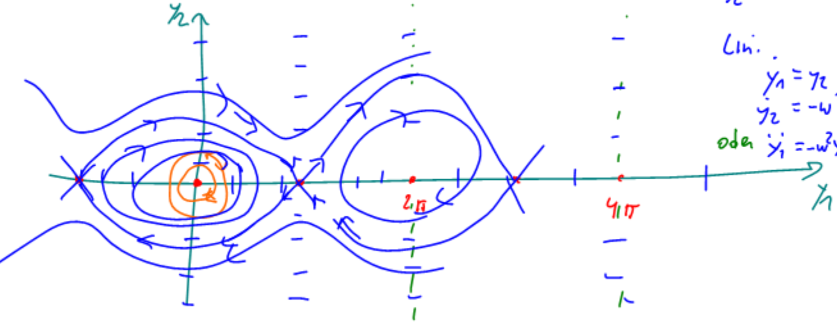
$\dot{y}_2 = -w^2 \sin y_1$

Lin.:

$\dot{y}_1 = y_2$

$\dot{y}_2 = -w^2 y_1$

oder $\ddot{y}_1 = -w^2 y_1$



4.1 Allgemeines

Wir betrachten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \qquad \text{mit } \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei sei $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hinreichend oft stetig differenzierbar.

Anfangswertaufgabe: Gebe Lösung zur Zeit $t = a$ vor

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0$$

Randwertaufgabe: Zur Festlegung einer Lösung $\mathbf{y}(t)$ werden nicht alle Komponenten y_i an einer Stelle vorgegeben wie oben, sondern

gewisse Komponenten y_i an verschiedenen Stellen $t = a, b, c, \ldots$

Typische Beispiele zu Randwertaufgaben.

1. Sturmsche Randwertaufgaben

$$\left\{\begin{array}{rcl} y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) & = & h(t) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) & = & d_1 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) & = & d_2 \end{array}\right.$$

2. Lineare Randwertaufgaben

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) & = & \mathbf{d} \end{array}\right.$$

3. Allgemeine Zweipunkt–Randwertaufgaben

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) & = & 0 \end{array}\right.$$

Randwerte entscheiden über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Beispiel: Wir betrachten die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben durch

$$y'' + y = 0.$$

i) $\boxed{y(t) = a\sin t + b\cos t}$

ii) $\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i$

$e^{it}, e^{-it} \Rightarrow \sin t, \cos t$

iii) $\dot y = z$, $\dot z = -y$ $\qquad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2} = \pm i, \quad a_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-it}$

$\begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ i\cos t - \sin t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

1. Die Randwerte

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ergeben die eindeutig bestimmte Lösung $y(t) = \sin t$.

2. Keine Lösung existiert für die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 1$$

3. Für die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

gibt es unendlich viele Lösungen $y(t) = c\sin t$ mit einem beliebigen $c \in \mathbb{R}$.

Existenzsatz für lineare Randwertaufgaben.

Satz: Gegeben sei die lineare Randwertaufgabe

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) & = & \mathbf{d} \end{array}\right.$$

mit stetigen Funktionen $\mathbf{A}(t), \mathbf{h}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $\mathbf{Y}(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem zu $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) Die Randwertaufgabe ist für alle stetigen Inhomogenitäten $\mathbf{h}(t)$ und Randwerte $\mathbf{d}$ stets eindeutig lösbar.

2) Die zugehörige Randwertaufgabe

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \cancel{\mathbf{h}(t)} \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) & = & \mathbf{0} \end{array}\right.$$

hat nur die triviale Lösung $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$.

3) Die Matrix

$$\mathbf{E} := \mathbf{B}_a\mathbf{Y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{Y}(b) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ist regulär.

Unser Beispiel: Die Differentialgleichung $y'' + y = 0$.

Wir schreiben die Gleichung zweiter Ordnung zunächst als ein System und bestimmen anschließend das zugehörige Fundamentalsystem:

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Damit folgt: $y(0) = y_0$, $y(b) = y_b$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(0) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B_b} Y(b) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_b \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{B}_a\mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}_b\mathbf{Y}(b) \\
&= \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{B_a} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix} \quad \text{regulär } \forall b \neq k\pi
\end{aligned}$$

Die Matrix **E** ist demnach regulär für $b = \pi/2$ und singulär für $b = \pi$.

reibungsfrei

$y = y_a \qquad v = 0$

$$mgy + m\frac{v^2}{2} = \text{const} = mg\,y_a$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2g\,(y_a - y)$$

$$v = \sqrt{2g}\,\sqrt{y_a - y}$$

$x = x(t) \qquad \dot{x} = \dot{x}$

$y = y(x(t)) \qquad \dot{y} = y'\dot{x}$

$$v = |v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + y'^2\dot{x}^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,\dot{x}$$

$$\sqrt{2g}\,\sqrt{y_a - y} = \sqrt{1 + y'^2}\,\dot{x}$$

$$T = \int_0^{t_b} dt = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_a - y}}\,dx \rightarrow \text{Min}}$$