Stabilitätssatz II bei linearen Differentialgleichungen.

Satz: (Stabilitätssatz II) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ mit der konstanten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist genau dann

1) strikt stabil, falls für alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gilt: $\mathrm{Re}\,(\lambda_j) < 0$.

2) gleichmäßig stabil, falls für alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gilt:

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_j) \le 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}\,(\lambda_j) = 0 \Rightarrow g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$$

3) In allen anderen Fällen ist die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ instabil.

Beispiel: Die Nulllösung des Systems mit Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

keine Aussage möglich

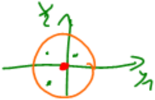
ist instabil, denn die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 0$ (doppelter Eigenwert), aber $g(\lambda_2) = 1 < a(\lambda_2) = 2$.

instabil

i) $y' = 0$ linear $\lambda_1 = 0$ geom = alg. $\Rightarrow$ stabil

$y = \text{const.}$ (in Definition $\varepsilon = \delta$) stabil

nicht asympt. stabil



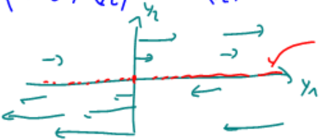
ii) a) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = 0$ alg. = geom.

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{0t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

stabil, nicht asymptotisch stabil

(Folie 78)

b) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{0t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}$



stat. Punkte

unbeschränkt!

instabil

Ein Beispiel zum Stabilitätssatz II.

1. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Der eindeutige Gleichgewichtspunkt ergibt sich als Lösung des linearen Gleichungssystems $-Ay = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und ist gegeben durch $\mathbf{y}^* = (3, -2)^T$. $\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

3. Die Transformation $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ liefert das homogene System

$\boxed{z'} = y' - \cancel{y^{*\prime}} = A(z + y^*) + b = \boxed{Az} + \underbrace{Ay^* + b}_{=0}$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z}.$$

4. Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ lauten $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ und damit ist $\mathbf{y}^*$ strikt stabil.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$a_2 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_0 = 2$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det_1 = 2 > 0 \\ \det_2 = 2 > 0 \end{array}\right\} \operatorname{Re} \lambda_i < 0$$

Satz: (Kriterium von Routh und Hurwitz) Gegeben sei das reelle Polynom

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \text{mit } a_n > 0.$$

Dann sind äquivalent: nur Aussage zu asymptotische Stabilität möglich

1) Alle Nullstellen von $p(z)$ haben negativen Realteil.

2) Es gilt $a_k > 0$ für alle $k = 0, 1, \ldots, n$, und alle Hauptunterdeterminanten der (n, n)–Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

sind positiv. Dabei setzen wir $a_k = 0$ für alle $k > n$.

Ein Beispiel zum Kriterium von Routh und Hurwitz.

Gegeben sei das Polynom mit strikt positiven Koeffizienten

$$p(z) = 2z^3 + 4z^2 + 5z + 6$$

Wir stellen zunächst die Matrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ auf:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Hauptunterdeterminaten sind $\det \mathbf{H}_1 = |5| = 5$ sowie

$$\det \mathbf{H}_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \qquad \text{und} \qquad \det \mathbf{H}_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

Also besitzen alle Nullstellen von $p(z)$ einen negativen Realteil.

Qualitatives Verhalten für ebene konstante Systeme.

Wir betrachten das homogene ebene System mit konstanten Koeffizienten

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \qquad \text{mit } \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Weiterhin seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit den zugehörigen Eigenvektoren bzw. Eigen– und Hauptvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.

Mit $\mathbf{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ und

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ oder } \lambda_1 = \lambda_2, g(\lambda_2) = 2 \\[2ex] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ und } g(\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

erhalten wir für $\mathbf{w}(t) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t)$ die Differentialgleichung $\mathbf{w}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{w}(t)$.

In der (w_1, w_2)–Phasenebene ergibt sich dann qualitativ das folgende Stabilitätsverhalten: Fortsetzung auf Folie.

Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen.

Wir betrachten das nichtlineare **autonome** System

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) = \cancel{f(0)} + Jf(0)(y-0) + g(y)$$

wobei $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gelte, d.h. $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

Stabilitätsuntersuchung mittels Linearisierung der rechten Seite

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) \\
\mathbf{A} &= \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0}) \\
\mathbf{g}(\mathbf{y}) &= \mathbf{o}(\|\mathbf{y}\|) \quad \text{mit } \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Folgt aus Taylor–Entwicklung der rechten Seite um den Entwicklungspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0})\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

Stabilitätssatz III für nichtlineare Gleichungen.

Satz: (Stabilitätssatz III) Mit den obigen Voraussetzungen gilt.

1) Gilt für alle Eigenwerte λ_j von $\mathbf{A} = \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0})$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0,$$

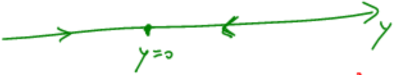
so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein strikt stabiler Gleichgewichtspunkt von $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, d.h. die Stabilität des linearisierten Systems überträgt sich auf das nichtlineare System.

2) Existiert ein Eigenwert λ_j von $\mathbf{A}$ mit

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0,$$

so ist der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ instabil, d.h. die Instabilität des linearisierten Problems überträgt sich ebenfalls aus das nichtlineare Problem.

$y' = -y|y|$ $\quad A = Jf(0) = 0 \quad \lambda_1 = 0$

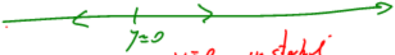


$y > 0 \quad y' < 0$

$y < 0 \quad y' > 0$

$y = 0$ ist asympt. stabil

$y' = +y|y|$ $\quad A = Jf(0) = 0 \quad \lambda_1 = 0$



$y > 0 \quad y' > 0$

$y < 0 \quad y' < 0$

$y = 0$ instabil

Beispiel: Linearisierung um den Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}_k = (y_{1k}, y_{2k})^T = (k\pi, 0)^T, k \in \mathbb{Z}$.

Wir linearisieren um den Gleichgewichtspunkt $(y_{1k}, y_{2k}) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(y_1, y_2) &= \underbrace{\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k})}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{J}\,\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k}) \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|) \\
&= \mathbf{J}\,\mathbf{f}(k\pi, 0) \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos k\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 (-1)^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|)
\end{aligned}$$

Stabilität des linearisierten mathematischen Pendels.

Die Linearisierung ergibt sich das lineare System

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2 \\
\dot{y}_2 &= -\omega^2(-1)^k(y_1 - k\pi)
\end{aligned}
$$

Wir berechnen die Eigenwerte der (konstanten) Koeffizientenmatrix

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix}
$$

Es gilt

$$
\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2(-1)^k
$$

Für die Eigenwerte folgt daraus

$$
\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm i\omega & : \quad \text{falls } k \text{ gerade} \\ \pm\omega & : \quad \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}
$$

Keine Aussage möglich

Instabil