Dgl n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \dots \quad a_1(t)\, y'(t) + a_0(t) = h(t)$$

System

homogen:
- .) FS (Fundamentalsystem finden) — i.A. schwierig — ✓
- .) Reduktionsverfahren (falls 1 Lsg bekannt Reduktion von $n \to n-1$) — (✓)
- .) Ansätze (charakteristisches Polynom) — Konstante Koeffizienten — ✓

inhomogen:
- .) Variation der Konstanten — ✓
- .) Greens funktion — (Konstante Koeffizienten)
- .) Ansätze — (Konstante Koeffizienten) — ✓

Spezieller Ansatz bei spezieller Inhomogenität.

Bei Inhomogenitäten der Form

$$h(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{m} \beta_j t^j$$

kann man spezielle Ansätze zur Bestimmung von $y_p(t)$ verwenden:

- Ist μ keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung $p(\lambda)$, so ist eine spezielle Lösung mit den freien Parametern γ_j

$$y_p(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{m} \gamma_j t^j$$

- Ist μ eine r-fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so ist eine spezielle Lösung

$$y_p(t) = e^{\mu t}\, t^r \sum_{j=0}^{m} \gamma_j t^j$$

Ein Beispiel mit spezieller Inhomogenität.

Wir betrachten die Gleichung

$$y'' - y = te^t \qquad y_h(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

Die charakteristische Gleichung ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ und $\mu = 1$ ist eine einfache Nullstelle.

$r=1$

Ansatz:

$$y_p(t) = e^t(\gamma_0 t + \gamma_1 t^2) = e^t t(\gamma_0 + \gamma_1 t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + (\gamma_0 + 4\gamma_1)t + \gamma_1 t^2)e^t - (\gamma_0 t + \gamma_1 t^2)e^t = te^t$$

Umsortieren liefert

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + 4\gamma_1 t)e^t = te^t$$

Daraus folgt $\gamma_0 = -\gamma_1 = -1/4$ und

$$y_p(t) = \frac{t}{4}(t-1)e^t$$

Das Superpositionsprinzip und komplexe Differentialgleichungen.

Superpositionsprinzip Gegeben sei eine inhomogene DGL der Form

weil linear !!

$$L(y_1+y_2) \overset{\checkmark}{=} L[y_1] + L(y_2) = L[y] = h(t) = h_1(t) + h_2(t) \qquad (2)$$

Sind $y_1(t)$ und $y_2(t)$ spezielle Lösungen von $L[y_1] = h_1(t)$ und $L[y_2] = h_2(t)$, so ist $y_p(t) := y_1(t) + y_2(t)$ eine spezielle Lösung von (2).

Komplexe Differentialgleichungen

Ist $h(t)$ der Real– oder Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion $w(t)$,

$$h(t) = \mathrm{Re}\,(w(t)) \quad \text{bzw.} \quad h(t) = \mathrm{Im}\,(w(t))$$

linear
reelle Koeffizienten

und ist $z(t)$ eine komplexe Lösung von $L[z] = w$, so ist $\mathrm{Re}\,L[z] = L[\underbrace{\mathrm{Re}\,z}_{y}] = \mathrm{Re}\,w = h(t)$

$$y(t) = \mathrm{Re}\,(z(t)) \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \mathrm{Im}\,(z(t))$$

eine reelle Lösung der Differentialgleichung $L[y] = h(t)$.

Beispiel zum Superpositionsprinzip und komplexer Differentialgleichung.

Ein spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t}\Big(\cos t + \sin(2t)\Big)$$

ist gegeben durch

$$y_p(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{4}t\cos(2t)\right)$$

- Beim Superpositionsprinzip betrachtet man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= e^{-t}\cos t = \operatorname{Re} e^{-t+it} = \operatorname{Re}\left(e^{(-1+i)t}\right) \\ y'' + 2y' + 5y &= e^{-t}\sin(2t) = \operatorname{Im} e^{(-1+2i)t} \end{aligned}$$

- Beide Gleichungen löst man durch Übergang auf komplexe Zahlen:

$$z'' + 2z' + 5z = e^{(-1+i)t} \quad \text{bzw.} \quad e^{(-1+2i)t}$$

Visualisierung: (Konstante Koeffizienten) + ebenes Problem ($n=2$)
homogen

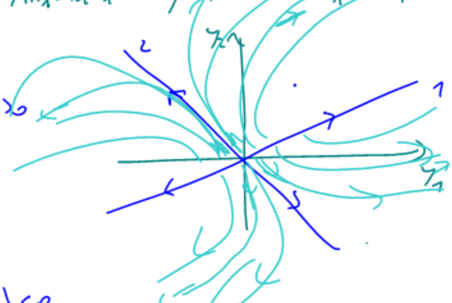
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

i) λ_i reell λ_1, λ_2
r_1, r_2

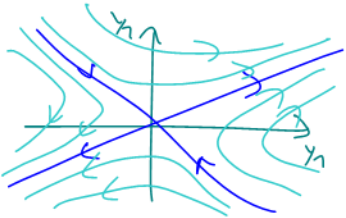
$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} r_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} r_2$$

$A r_1 = \lambda_1 r_1$ $\quad y' = A e^{\lambda_1 t} r_1 = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} r_1$

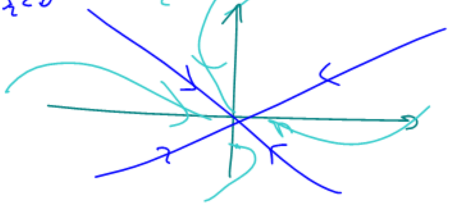
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$



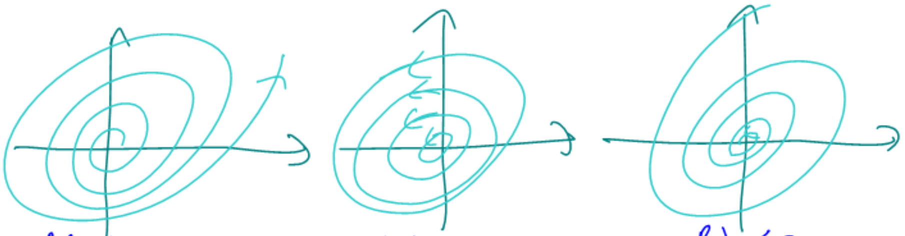
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$



$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



$\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ Komplex   Folie Seite 76



$Re\,\lambda_1 > 0$ $Re\,\lambda_1 = 0$ $Re\,\lambda_1 < 0$

Romeo + Julia

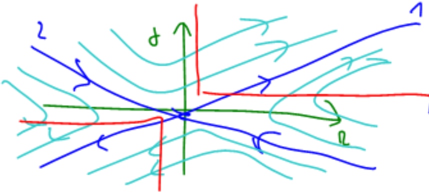
$a, b > 0$

$$\begin{pmatrix} \dot r \\ \dot j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a j \\ b r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ j \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & a \\ b & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - ab = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{ab}$$

$$r_{1/2} = \begin{pmatrix} a \\ \lambda_{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \pm\sqrt{ab} \end{pmatrix}$$



Falls $\begin{pmatrix} r \\ j \end{pmatrix}(0) = \alpha r_2$

$t \to \infty$

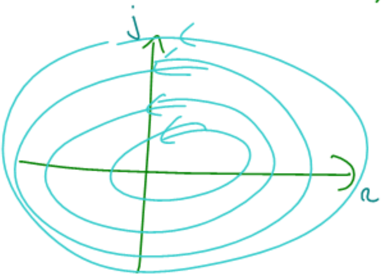
$$\begin{pmatrix} r \\ j \end{pmatrix}(t) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ j \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} -aj \\ br \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ r \end{pmatrix}$$

$a, b > 0$

$\lambda^2 + ab = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ab}$



Periode $\sqrt{ab}$

$\frac{3}{4}$ der Zeit $\begin{cases} \text{Hass} \\ \text{oder} \\ \text{Liebe + Hass des anderen} \end{cases}$

3.4 Die Laplace–Transformation

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine reell– oder komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}$. Die Laplace–Transformierten von F ist gegeben durch die Integraltransformation

$$f(s) := \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \tag{3}$$

wobei $s \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl ist.

Frage: Für welche Funktionen $F(t)$ existiert das uneigentliche Integral?

Schreiben wir die komplexe Zahl s als

für welche s macht das Sinn?

$$s = \sigma + i\omega$$

so folgt

$$f(s) := \int_0^\infty e^{-\sigma t} \Big(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \Big) F(t) dt$$

Antwort: Wachstumsverhalten von $F(t)$ ist entscheidend.

Satz: Ist F auf $[0, \infty)$ lokal integrierbar und erfüllt F mit gewissen Konstanten M und σ_0 eine Ungleichung der Form

$$\boxed{|F(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}} \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

so existiert die Laplace–Transformierte für alle $s \in \mathbb{C}$ mit

$$\boxed{\mathrm{Re}(s) > \sigma_0}$$

Beweisidee: Setzen wir $s = \sigma + i\omega$, so gilt

$$|e^{-st}F(t)| = e^{-\sigma t}|F(t)| \leq Me^{-(\sigma-\sigma_0)t}$$

Aus $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ folgt also

$$(\sigma - \sigma_0)t > 0 \qquad \text{für alle } t > 0$$

und damit die Konvergenz des uneigentlichen Integrals.

Notationen und Bezeichnungen.

Sei $F(t)$ eine reell– oder komplexwertige Funktion, für die die Laplace–Transformierte $f(s)$ existiert.

1. Wir schreiben auch $f = \mathcal{L}[F]$
2. Das Doetsch–Symbol lautet $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$:

$$F \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet f \quad \text{oder} \quad f \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ F$$

3. Eine Beziehung

$$f = \mathcal{L}[F] \quad \text{bzw.} \quad F \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet f$$

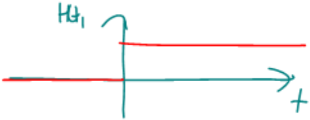
nennt man eine Korrespondenz, die Zuordnung $F \longrightarrow f$ heißt Laplace–Transformation.

4. Die Laplace–Transformation ist linear, d.h.

$$\mathcal{L}[\alpha F + \beta G] = \alpha \mathcal{L}[F] + \beta \mathcal{L}[G]$$

Beispiel zur Laplace–Transformation.

Wir betrachten die Heaviside–Funktion



$$H(t) := \begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ 1 & : \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Die Laplace–Transformierte lautet

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0=t}^{\infty=t} = \frac{1}{s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Dies ergibt die Korrespondenz

$$1 \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$$

Beispiel zur Laplace–Transformation.

Die Laplace–Transformierte von

$$F(t) = t^n \qquad \text{mit } n = 1, 2, \ldots$$

ist gegeben durch

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n dt$$

Das Integral existiert für $\text{Re}(s) > 0$ und mittels partieller Integration findet man

$$\int_0^\infty e^{-st}\, t^n dt = \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-1} dt \cancel{+ \frac{n t^{n-1}}{s} e^{-st}}\Big|_0^\infty = \frac{n(n-1)}{s^2} \int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-2}\, dt$$

Eine wiederholte Anwendung der partiellen Integration ergibt die Korrespondenz

$$t^n \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

Beispiel zur Laplace–Transformation.

Gegeben sei die komplexe Funktion

$$F(t) = e^{at} \qquad \text{mit } a = \alpha + i\beta.$$

Für die Laplace–Transformierte ergibt sich

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt \\ &= -\frac{1}{s-a}\, e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

für $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a) = \alpha$.

Damit erhalten wir die Korrespondenz

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s-a}$$

Beispiel zur Laplace–Transformation.

Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \sin(\omega_0 t) \qquad \text{mit } \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Wegen

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$$

erhalten wir die Korrespondenz

$$\sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

denn

$$\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega_0} - \frac{1}{s+i\omega_0}\right)$$

Beispiel zur Laplace–Transformation.

Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \cos(\omega_0 t) \qquad \text{mit } \omega_0 \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Wegen

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$$

erhalten wir die Korrespondenz

$$\cos(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

denn

$$\frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega_0} + \frac{1}{s+i\omega_0}\right)$$

Korrespondenztabelle.

$\mathrm{Re}\, s > \sigma_0$

$F(t)$	$f(s)$	σ_0	Bemerkung
1	$\frac{1}{s}$	0	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0	$n = 1, 2, \ldots$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}(a)$	a komplex
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	0	ω_0 reell
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	0	ω_0 reell

1. Additionssatz: Für beliebige komplexe Konstanten a und b gilt

$$aF(t) + bG(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; af(s) + bg(s)$$

2. Ähnlichkeitssatz: Für jede reelle Konstante $\alpha > 0$ gilt

$$F(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{s}{\alpha}\right) = \quad \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\alpha}\alpha t} F(\alpha t)\, d(\alpha t)$$

$$= \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Beispiel: Aus

$$e^t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s-1}$$

folgt

$$e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\frac{s}{\alpha}-1} = \frac{1}{s-\alpha}$$

Grundregeln der Laplace–Transformation.

3. Differentiationssatz: F sei für $t > 0$ differenzierbar und es existiere die Laplace–Transformierte von F'. Dann gilt $\int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = \underbrace{e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty}_{-F(0)} + s\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt}_{f(s)} =$

$$F'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; sf(s) - F(0)$$

Besitzt F im Ursprung eine Unstetigkeitsstelle, so ist $F(0)$ der rechtsseitige Grenzwert

$$F(0) := \lim_{t \searrow 0} F(t)$$

$\int_0^\infty e^{-st}F''(t)\,dt = s\int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt - F(0) =$

$= s\,(s\,f(s) - F'(0)) - F(0)$

$= s^2 f(s) - s\,F'(0) - F(0)$

Allgemein gilt für höhere Ableitungen $(n \geq 2)$ die Formel

$$F^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - F^{(n-1)}(0)$$

4. Multiplikationssatz: Es gilt $\int_0^\infty e^{-st}(-t)F(t)\,dt = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = \frac{d}{ds}f(s)$

$$-tF(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; f'(s) \quad \text{bzw.} \quad tF(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; -f'(s)$$

und allgemein

$$(-t)^n F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; f^{(n)}(s) \quad \text{bzw.} \quad t^n F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; (-1)^n f^{(n)}(s)$$

Grundregeln der Laplace–Transformation.

5. Integrationssatz: Es gilt $\int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t F(\tau)d\tau\, dt \overset{p.I.}{=} \;=\; \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\,dt$

$$\int_0^t F(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet \frac{f(s)}{s}$$

6. Divisionssatz: Die Funktion besitze den Wachstumskoeffizienten σ_0, und es existiere die Laplace–Transformierte von

$$G(t) := \frac{F(t)}{t}$$

Dann gilt für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

$$G(t) = \frac{F(t)}{t} \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet \int_s^{\infty} f(u)du$$

Grundregeln der Laplace–Transformation.

7. Verschiebungssatz: Für alle $T_0 > 0$ gilt $e^{-sT_0} \int_0^{\infty} e^{-s(t-T_0)} F(t-T_0)\, d(t-T_0) = e^{-sT_0} f(s)$

$$F(t - T_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ e^{-sT_0} f(s)$$

8. Dämpfungssatz: Für ein beliebiges komplexes a gilt:

$$e^{at} F(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ f(s - a)$$

Beispiel: Aus

$$\sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

folgt

$$e^{at} \sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\omega_0}{(s - a)^2 + \omega_0^2}$$