Fundamentalsysteme für Jordan–Kästchen.

Ein System in der Form eines Jordan–Kästchens

$z(t) = S^{-1} y(t)$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$z_{n-1,t} = \lambda_1 z_{n-1} + z_n$

$z_{n,t} = \lambda_1 z_n$

kann unter Verwendung der Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$ explizit gelöst werden

$$e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} t^2/2! \\ t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} t^{r-1}/(r-1)! \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t/1! \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$z_2' = -2\, z_2 \qquad z_2 = z_{20}\, e^{-2t}$$

$$z_1' = -2\, z_1 + z_2$$

$$\boxed{z_1' = -2 z_1 + z_{20}\, e^{-2t}}$$

$$z_{1h}(t) = z_{10}\, e^{-2t}$$

$$z_{1p}(t) = c\, t\, e^{-2t} = z_{20}\, t\, e^{-2t}$$

Folie 24

$$z_{1p}' = c\, e^{-2t} - \cancel{2ct}\, e^{-2t} \overset{!}{=} -\cancel{2ct}\, e^{-2t} + z_{20}\, e^{-2t} \Rightarrow z_{20} = c$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{10}\, e^{-2t} + z_{20}\, t\, e^{-2t} \\ z_{20}\, e^{-2t} \end{pmatrix} = z_{10}\, \underbrace{e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + z_{20}\, \underbrace{e^{-2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Fundamentalsysteme für nicht–diagonalisierbare Matrizen.

Betrachten wir die Jordansche Normalform der Systemmatrix $\mathbf{A}$

$y = Sz$

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

so besteht die Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ aus Eigen– und Hauptvektoren

$(A - \lambda_1 I)v^{11} = 0$

$(A - \lambda_1 I)v^{12} = v^{11}$

$$\mathbf{S} \quad = \quad (\overset{\lambda_1}{\underset{EV}{\mathbf{v}^{11}}}, \ldots, \mathbf{v}^{1r_1} \,|\, \overset{\lambda_2}{\underset{EV}{\mathbf{v}^{21}}}, \ldots, \mathbf{v}^{2r_2} \,|\, \ldots \,|\, \overset{\lambda_m}{\underset{EV}{\mathbf{v}^{m1}}}, \ldots, \mathbf{v}^{mr_m})$$

$\mathbf{v}^{j1}$: Eigenvektor zum Eigenwert λ_j, $j = 1, \ldots, m$

$\mathbf{v}^{jk}$: Hauptvektor der Stufe $(k-1)$, $k = 2, \ldots, r_j$

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}_n)\mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_{j,k-1}, \, k = 2, \ldots, r_j$$

Wir setzen nun $\mathbf{z}(t) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t)$. Dann gilt

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{y}'(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\,\mathbf{z}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{z}(t)$$

Ein Fundamentalsystem für $\mathbf{z}' = \mathbf{J}\,\mathbf{z}$ haben wir bereits berechnet.

Fundamentalsysteme für nicht–diagonalisierbare Matrizen.

Eine Rücktransformation ergibt ein Fundamentalsystem für $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$.

Für ein einzelnes Jordan–Kästchen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{11}(t) &= e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^{11} \\
\mathbf{y}^{12}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t}{1!}\,\mathbf{v}^{11} + \mathbf{v}^{12}\right) \\
&\vdots \\
\mathbf{y}^{1r}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,\mathbf{v}^{11} + \cdots + \frac{t}{1!}\,\mathbf{v}^{1,r-1} + \mathbf{v}^{1r}\right)
\end{aligned}$$

Vorgehen zur Bestimmung der Lösung:

1. Bestimmung der Eigenwerte, Eigen– und Hauptvektoren,
2. Berechnung der Lösungen nach obiger Formel,
3. Zusammenfügen dieser Einzelmatrizen zur Fundamentalmatrix.

Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ergibt $\lambda = 1$ als dreifacher Eigenwert:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = (1-\lambda)^3$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen einen Eigenvektor für $\lambda = 1$:

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{1}\,0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\operatorname{rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = 2$ gilt, ist die geometrische Vielfachheit $g(\lambda) = 1$.

Fortsetzung des Beispiels.

Wir benötigen Hauptvektoren der Stufe 1 und 2:

$(A-\lambda I)v^2 = e_1$ $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$(A-\lambda I)v^3 = v^2$ $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch:

$$\mathbf{y}^1(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 16t \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^3(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 8t^2 \\ -4t+1 \\ 8t+2 \end{pmatrix}$$

Ein zweites Beispiel für nicht-diagonalisierbare Matrizen.

Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Wieder ist $\lambda = 1$ dreifacher Eigenwert von $\mathbf{A}$, aber es gilt $g(\lambda) = 2$.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es existieren also zwei linear unabhängige Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{v}^1}_{EV} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underbrace{\mathbf{v}^2}_{EV} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3)^2 = \mathbf{0}$$

Wir suchen daher einen zu $\mathbf{v}^1$ und $\mathbf{v}^2$ linear unabhängigen Vektor $\mathbf{v}^{22}$ (Hauptvektor der Stufe 1).

Fortsetzung des Beispiels.

Wählen wir $\mathbf{v}^{22} = (0,0,1)^T$, so folgt $\mathbf{v}^{21} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3)\mathbf{v}^{22} = (1,1,0)^T$.

Damit erhalten wir ein System von Eigen– und Hauptvektoren in der Form

$$\underbrace{\mathbf{v}^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{EV}, \quad \underbrace{\mathbf{v}^{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{EV}, \quad \underbrace{\mathbf{v}^{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{HV}$$

und die Jordansche Normalform von A ist

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

Das zugehöriges Fundamentalsystem lautet dann

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^3(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gegeben sei eine skalare, lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung:

$a_n(t) = 1$

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = h(t)$$

wobei $a_k(t)$, $k = 0, \ldots, n-1$ stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind.

$y_2 = y_1'$,
$y_3 = y_2'$
$\vdots$

Eine solche Gleichung läßt sich als ein System erster Ordnung schreiben:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ h(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

wobei

$$y_k(t) := y^{(k-1)}(t), \quad k = 1, 2, \ldots .n$$

Die homogene Differentialgleichung höherer Ordnung.

Definition: Ein Funktionensystem $(y_1(t), \dots, y_n(t))$ heißt Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = h(t),$$

falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Die Funktionen $y_k(t)$ lösen die homogene Gleichung, d.h.

$$L[y_k] = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

- Die Wronski–Determinante

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ist für mindestens ein $t_0 \in \mathbb{R}$ ungleich Null, $W(t_0) \neq 0$.

Bemerkungen.

- Ist $W(t_0) \neq 0$, so gilt auch $W(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Weiter löst $W(t)$ die Differentialgleichung $W'(t) = -a_{n-1}(t)W(t)$, und daher gilt

$W'(t) = -\mathrm{sp}\, A(t)\, W(t)$,
$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(\tau)d\tau\right)$$

- Ein Fundamentalsystem $(y_1, \ldots, y_n)$ läßt sich durch Lösung von n Anfangswertaufgaben $(k = 1, \ldots, n)$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L[y_k] &= 0 \\ y_k^{(i)}(t) &= \begin{cases} 0 & : \quad i \neq k-1 \\ 1 & : \quad i = k-1 \end{cases} \qquad (i = 0, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y(t) = y_p(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k\, y_k(t),$$

wobei $y_p(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Das Reduktionsverfahren. zur Lsg des homogenen Problems

Sei $u(t) \neq 0$ eine Lösung der homogenen Gleichung $L[y] = 0$.

Produktansatz:

Wir suchen eine weitere (linear unabhängige) Lösung in der Form

$$y(t) = u(t) \cdot z(t)$$

Die ersten Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} y'(t) &= u'(t)z(t) + u(t)z'(t) \\ y''(t) &= u''(t)z(t) + 2u'(t)z'(t) + u(t)z''(t) \end{aligned}$$

Allgemein gilt dann:

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t)\, z^{(j)}(t)$$

Einsetzen in $L[y] = 0$ ergibt:

j = 0   j = 1, ..., k

$$
\begin{aligned}
L[y] &= \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t)\, z^{(j)}(t) \\
&= \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \binom{k}{0} u^{(k)}(t) \right]}_{=0} z + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t)\, z^{(j)}(t) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j\, z^{(j)}(t)
\end{aligned}
$$

b_j

Setzt man $w(t) := z'(t)$, so ergibt sich eine homogene Differentialgleichung der Ordnung $\boxed{n-1}$:

$$
\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}\, w^{(j)}(t) = 0
$$

Fortsetzung des Reduktionsverfahrens.

Ist $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ein Fundamentalsystem von

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}\, w^{(j)}(t) = 0$$

so setzen wir

$w_k(t) = z_k'(t)$

$$z_k(t) = \int_{t_0}^{t} w_k(\tau)d\tau, \qquad k = 1, \ldots, n-1$$

Mit dem ursprünglichen Ansatz ist dann die Funktionenmenge

$$(u, \underline{z_1} \cdot u, \ldots, \underline{z_{n-1}} \cdot u)$$

ein Fundamentalsystem das Ausgangsgleichung, also $L[y] = 0$ mit

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0$$

Ein Beispiel zum Reduktionsverfahren.

Die Differentialgleichung $y'' + ty' + y = 0$ besitzt die Lösung

$$u(t) = e^{-t^2/2}$$

Unser Ansatz $y = u \cdot z$ liefert:

$$\begin{aligned} y' &= u' \cdot z + u \cdot z' \\ y'' &= u'' \cdot z + 2u' \cdot z' + u \cdot z'' \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} y'' + ty' + y &= u''z + 2u'z' + uz'' + t(u'z + uz') + uz \\ &= 2u'z' + uz'' + tuz' = 0 \end{aligned}$$

Wir setzen $w = z'$ und erhalten für w die Gleichung erster Ordnung

$$uw' + (2u' + tu)w = 0 \quad \Rightarrow \quad w' = -\frac{2u' + tu}{u} w$$

Fortsetzung des Beispiels.

Wir berechnen:

$$t = \frac{2u' + tu}{u} = \frac{-2te^{-t^2/2} + te^{-t^2/2}}{e^{-t^2/2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{w' = tw}$$

Damit gilt:

$$z'(t) = w(t) = e^{t^2/2} \quad \Rightarrow \quad z(t) = \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

Wir erhalten damit das Fundamentalsystem

$$\boxed{y_1(t)} = \underline{u(t)} = e^{-t^2/2} \qquad \boxed{y_2(t)} = e^{-t^2/2} \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau = z \cdot u$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$y_h(t) = c_1 e^{-t^2/2} + c_2 e^{-t^2/2} \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

Die inhomogene Differentialgleichung höherer Ordnung.

Ist das Funktionensystem $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Fundamentalsystem, so ist die Matrix

Ansatz
$y_p(t) = Y(t)\, c(t)$
$\downarrow$

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \ldots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix des zugehörigen Systems erster Ordnung. Die Methode der Variation der Konstanten ergibt dann das lineare Differentialgleichungssystem:

$\downarrow$
$Y(t)\, c'(t) = h(t)$

$$\begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \ldots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_{n-1}' \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Die Methode der Greenschen Funktion (Grundlösungsverfahren).

Gegeben sei die inhomogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = h(t)$$

Satz: Sei $w(t)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe (homogen)

$$L[w] = 0, \quad w^{(k)}(t_0) = \begin{cases} 0 & : \quad k = 0, \ldots, n-2 \\ 1 & : \quad k = n-1 \end{cases}$$

Dann ist eine spezielle Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)h(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} w(t-\tau+t_0)\,h(\tau)\,d\tau \\ G(t,\tau) &= w(t-\tau+t_0) \qquad \text{(Greensche Funktion)} \end{aligned}$$

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} w(t-\tau+t_0)\,h(\tau)\,d\tau$$

$$y_p'(t) = \underbrace{\cancel{w(t_0)}}_{=0}\,h(t) + \int_{t_0}^{t} w'(t-\tau+t_0)\,h(\tau)\,d\tau$$

$$y_p''(t) = \underbrace{\cancel{w'(t_0)}}_{=0}\,h(t) + \int_{t_0}^{t} w''(t-\tau+t_0)\,h(\tau)\,d\tau$$

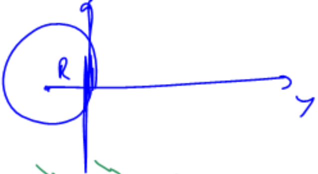
$$y_p^{(n)}(t) = \underbrace{w^{(n-1)}(t_0)}_{=1}\,h(t) + \int_{t_0}^{t} w^{(n)}(t-\tau+t_0)\,h(\tau)\,d\tau$$

$$\boxed{L[y_p] = \sum_{k=0}^{n} a_k\, y_p^{(k)}(t) = h(t)} + \cancel{\int_{t_0}^{t} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k\, w^{(k)}(t-\tau+t_0)}_{=L[w]=0} \cdot h(\tau)\,d\tau}$$

Tsohmi II

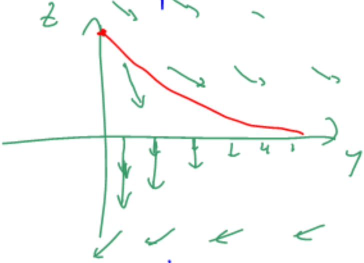
$$\cancel{m}\, y'' = -G\,\frac{m_+ \,\cancel{m}}{(y+R)^2} \qquad \frac{Gm_+}{R^2} = g$$

$$c_0 = Gm_+ = gR^2$$



$$y' = z$$

$$z' = -\frac{c_0}{(y+R)^2}$$



$$y''y' = -\frac{c_0}{(y+R)^2}\,y'$$

$$\left(\frac{y'^2}{2}\right)' = \left(\frac{c_0}{(y+R)}\right)'$$

$$\frac{y'^2}{2} - \frac{(y')_0^2}{2} = \frac{c_0}{y+R} - \frac{c_0}{\cancel{y_0}+R} \quad \text{Erde}$$

$y_0 = 0$

entweder $y' \to 0,\ y \to \infty$

$$\frac{(y')_0^2}{2} = \frac{c_0}{R} \Rightarrow (y')_0 = \sqrt{\frac{2c_0}{R}}$$

Erde $\quad (y')_0 = \sqrt{2\frac{c_0}{R}} = \sqrt{2\frac{gR^2}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 6\cdot 1000^2} =$

$$\simeq 11\cdot 10^3 \ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$\simeq 11 \ \mathrm{Km\,s^{-1}}$$

<u>Tschum:</u> $\quad (y')_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot 10^{-4}\, 10^{4}} = 4{,}5\cdot 10^{-2} \ \mathrm{m\,s^{-1}}$

Lineare Gleichungen n–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Gegeben sei die homogene Gleichung

$$L[y] := a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = h(t)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$ und $a_n = 1$. Zur Berechnung eines Fundamentalsystems machen wir den Ansatz

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

Daraus folgt

$$L[y] = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t} = 0$$

Unser Ansatz liefert eine Lösung, falls λ eine Nullstelle der so genannten charakteristischen Gleichung ist:

$$p(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$$

Die charakteristische Gleichung und Fundamentalsysteme.

Satz:

1) Ist λ_k eine r_k–fache reelle Nullstelle von $p(\lambda)$, so existieren die folgenden Lösungen der homogenen Gleichung

$$\begin{aligned} y_{k1}(t) &= e^{\lambda_k t} \\ y_{k2}(t) &= t \cdot e^{\lambda_k t} \\ &\vdots \\ y_{k,r_k}(t) &= t^{r_k-1} \cdot e^{\lambda_k t} \end{aligned}$$

2) Ist λ_k eine r_k–fache **komplexe** Nullstelle, $\lambda_k \notin \mathbb{R}$, so sind die reellen Lösungen mit $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ gegeben durch

$$y_{kj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t) \qquad y_{lj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t)$$

und $j = 1, \ldots, r_k$.

3) Die Lösungen aus 1) und 2) bilden ein Fundamentalsystem von $L[y] = 0$.

Beispiele.

- Gegeben sei die homogene Gleichung vierter Ordnung

  $$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

  Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet dann:

  $$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$ $e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}$

  und besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$.

  Ein Fundamentalsystem ist daher

  $$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos t \qquad & y_3(t) &= t \cdot \cos t \\ y_2(t) &= \sin t \qquad & y_4(t) &= t \cdot \sin t \end{aligned}$$

- Die homogene Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$ besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 1$. e^t, te^t

  Die allgemeine Lösung ist daher

  $$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 te^t$$

Ein Beispiel für eine inhomogene Gleichung.

Wir betrachten die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$$

Bei der Variation der Konstanten verwenden wir den Ansatz

$$y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$$

Gelöst werden muss dann das DGL–System

$$\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{t^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1' e^t + c_2' te^t &= 0 \\ c_1' e^t + c_2'(1+t)e^t &= \frac{e^t}{t^2} \end{aligned}$$

$c_1' = -\frac{1}{t}$

$\Rightarrow c_2' = \frac{1}{t^2} \qquad c_2 = -\frac{1}{t}$

Man berechnet direkt

$$c_1(t) = -\ln|t| \qquad c_2 = -\frac{1}{t}$$

und eine spezielle Lösung ist daher

$$y_p(t) = -\Big(\ln|t| + 1\Big)e^t$$

Noch einmal das Beispiel.

Wir betrachten wieder die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$$

und verwenden die Methode der Greenschen Funktion: $t_0 = 1$

Die Lösung von $w(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$

$$w'' - 2w' + w = 0, \quad w(1) = 0, \quad w'(1) = 1$$

ist gegeben durch $\boxed{w(t) = (t-1)e^{t-1}}$. Also gilt für die Greensche Funktion

$$G(t,\tau) = w(t - \tau + 1) = (t - \tau)e^{t-\tau}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_1^t \overbrace{(t-\tau)e^{t-\tau}}^{G(t,\tau)} \overbrace{\frac{e^\tau}{\tau^2}}^{h(\tau)} d\tau \\ &= e^t(-1 + t - \ln|t|) \end{aligned}$$