Lineare Systeme

$$y'(t) = A(t)\, y(t) + h(t)$$

Allgemeine Lsg. $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$$y_p'(t) = A(t)\, y_p(t) + h(t)$$
$$y_h'(t) = A(t)\, y_h(t)$$

Falls y_1, y_2 Lsg. des homogenen Systems

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = A y_1 \\ y_2' = A y_2 \end{array}\right\} \quad y = a y_1 + b y_2, \quad \boxed{y' = a y_1' + b y_2' = a A y_1 + b A y_2 \overset{!}{=} A(a y_1 + b y_2) = A y}$$

weil linear!

gilt nicht beim inhomogenen Problem

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = A y_1 + h \\ y_2' = A y_2 + h \end{array}\right\} \quad y = a y_1 + b y_2 \quad \boxed{y' = \ldots = A y + (a+b) h}$$

keine Lsg. der inhomogenen Problems!

Wir betrachten jetzt die inhomogene Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung verwenden wir wie bei einer skalaren Gleichung eine Variation der Konstanten

Ansatz
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$$
suche $c = c(t)$

Setzt man diesen Ansatz in die inhomogene Gleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{Y}'(t)\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \boxed{\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t)} \stackrel{!}{=} A(t)\,y(t) + \boxed{h(t)} \end{aligned}$$

$y' = A(t)y$

Finde Fundamentalmatrix $Y(t) \Rightarrow y_h(t) = Y(t) \cdot c$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Unser Ansatz $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t)$ löst also die inhomogene Gleichung, falls

$$Y^{-1}(t)\cdot \quad / \qquad \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) = \mathbf{h}(t)$$

Da $\mathbf{Y}(t)$ regulär ist, können wir dies auch in der Form $\boxed{\mathbf{c}'(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t)\,\mathbf{h}(t)}$ schreiben. Durch Integration erhält man

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\,\mathbf{h}(\tau)\,d\tau$$

Satz: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$\mathbf{y}(t) = \overbrace{\mathbf{Y}(t)\left(\ \mathbf{c}_0\right.}^{\text{Lsg des homogenen Problems}} + \left.\int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\,\mathbf{h}(\tau)\right)$$

Insbesondere gilt mit $\mathbf{c}_0 := \mathbf{Y}(t_0)^{-1}\,\mathbf{y}_0$ gerade $\overset{AB}{\boxed{\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0.}}\ \boxed{= Y(t_0)\,c_0}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t \\ -4t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1h} \\ y_{2h} \end{pmatrix} = Y(t) \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t^2} & 0 \\ 0 & e^{2t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}$$

$$Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & 0 \\ 0 & e^{-2t^2} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t Y^{-1}(\tau)\, h(\tau)\, d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau^2} & 0 \\ 0 & e^{-2\tau^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\tau \\ -4\tau \end{pmatrix} d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-\tau^2} 2\tau \\ -e^{-2\tau^2} 4\tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} e^{-t^2} \\ e^{-2t^2} \end{pmatrix} \Bigg|_0^t = \begin{pmatrix} e^{-t^2} - 1 \\ e^{-2t^2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = Y(t) \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t^2} - 1 \\ e^{-2t^2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = Y(0) \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = Y^{-1}(0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Fundamentalsysteme können explizit berechnet werden, falls

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist dann unabhängig von t und besitzt konstante Koeffizienten.

Ansatz: Wir suchen eine Lösung in der Form

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C} \text{ und } \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n.$$

Setzen wir dies in die Gleichung ein, ergibt sich

$\lambda v = Av$

$$\mathbf{y}'(t) = \underline{\lambda e^{\lambda t}}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{y} \stackrel{!}{=} \mathbf{A}\mathbf{y} = \underline{e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{v}}$$

Also ist $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ genau dann eine Lösung, falls $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ ist, denn

$$\boxed{\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}}$$

$y(t) = e^{\lambda t} v$

Fundamentalsysteme bei konstanten Koeffizienten I.

Ist $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ so besitzt die Anfangswertaufgabe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(0) & = & \mathbf{v} \end{array} \right.$$

die Lösung $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$.

Fall 1: Alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\mathbf{A}$ sind reell und es existiert eine Basis aus reellen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$.

Dann ist eine Fundamentalmatrix gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}^1, \ldots, e^{\lambda_n t}\,\mathbf{v}^n)$$

$Y(0) = (v^1, \ldots, v^n)$

und die allgemeine Lösung lautet

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k t}\,\mathbf{v}^k, \qquad c_k \in \mathbb{R}$$

Komlexwertige Fundamentalsysteme.

Beispiel: Wir betrachten das System

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0 = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$= (1-\lambda)^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow (1-\lambda)^2 = -4$

$1-\lambda = \pm 2i$

$\lambda_{1/2} = 1 \mp 2i$

Die Eigenwerte und –vektoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 2i, & \mathbf{v}^1 &= (1, -2i)^T \\ \lambda_2 &= 1 - 2i, & \mathbf{v}^2 &= (1, 2i)^T \end{aligned}$$

$(A - \lambda_1 I) v^1 = 0$

$\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} v^1 = 0$

Es existiert also eine Basis aus Eigenvektoren, aber die Eigenvektoren und Eigenwerte sind komplexwertig und ein komplexes Fundamentalsystem:

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t}\,\mathbf{v}_2)$$

Wir suchen aber reellwertige Lösungen!

$y'(t) = A\,y(t)$

$A = S\,\Lambda\,S^{-1}$ falls n l.u. EV

Diagonalmatrix

$S = (v^1 | v^2 | \ldots | v^n)$ regulär

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$S^{-1} A S = \Lambda$

$A(v^1\, v^2\, v^n) = (v^1\, v^2 \ldots v^n)\Lambda$ jede Spalte $\boxed{A v^i = \lambda_i v^i}$

$y'(t) = S \Lambda S^{-1} y(t)$

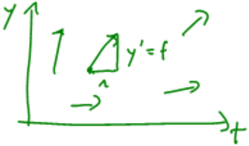
$(S^{-1}y)' = S^{-1} y'(t) = \Lambda\,(S^{-1} y(t)) \Rightarrow z(t) = S^{-1} y(t) \qquad z'(t) = \Lambda z(t)$

$z'(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} z(t) \qquad z_i(t) = e^{\lambda_i t} e_i \Rightarrow \boxed{y_i(t) = S z_i(t) = (v^1 \ldots v^n)\, z_i(t) = e^{\lambda_i t} v^i}$

s

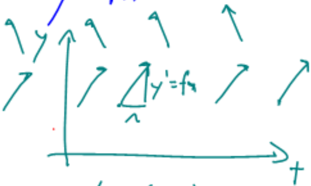
Darstellung von Lsg

$y' = f(t,y)$



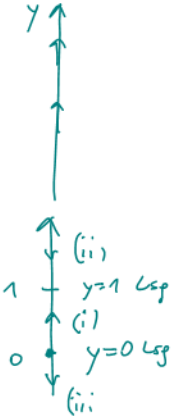
autonom

$y' = f(y)$

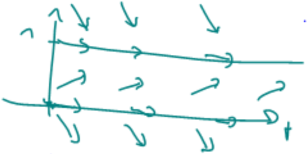


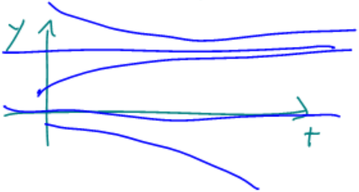
$\Rightarrow$

Projektion

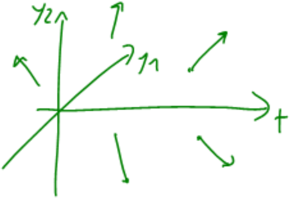


$y' = y(1-y)$

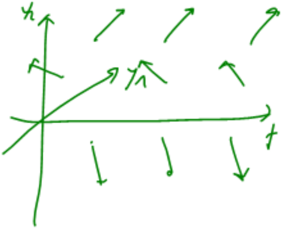




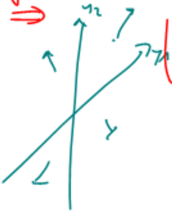
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(y_1, y_2, t) \\ f_2(y_1, y_2, t) \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$$ autonom



Projektion $\Rightarrow$



$\boxed{\text{nur 2dimensional}}$

<u>Bspl</u>: $y'' = -g$ $y(0) = 0$, $y'(0) = c$

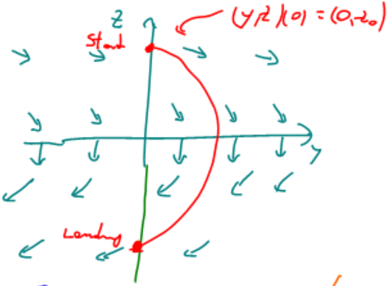
$$\left.\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= -g \end{aligned}\right\}\ \text{autonom}$$

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + z_0 t = -\frac{g}{2}\left(t - \frac{z_0}{g}\right)^2 + \frac{g}{2}\frac{z_0^2}{g^2}$$

$$T_{\text{[illegible]}} = 2\,\frac{z_0}{g}$$

$$\text{Höhe} = \frac{z_0^2}{2g} = \frac{g^2 T_2^2}{4\cdot 2\cdot g} = \frac{g\,T_2^2}{8}.$$

$$\text{Höhe}\,(2h) = g_{\text{Tschw}}\cdot\frac{T_2^2}{8} = \frac{10^{-5}\cdot 10}{8}\cdot 49\cdot 10^6 \approx 6\cdot 10^2 \qquad g_{\text{Tschw}} = 10^{-5} g$$



Erdinnen | Atmosphere

Fundamentalsysteme bei konstanten Koeffizienten II.

Fall 2: Die Systemmatrix **A** ist diagonalisierbar.

Dann existiert eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus (komplexen) Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$. Die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ müssen weder reell noch einfach sein.

Ein komplexes Fundamentalsystem für $\mathbb{C}^n$ ist gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}^1, \dots, e^{\lambda_n t}\,\mathbf{v}^n)$$

Die allgemeine komplexwertige Lösung des homogenen Systems mit konstanten reellen Koeffizienten lautet

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k t}\,\mathbf{v}^k, \qquad c_k \in \mathbb{C}$$

$= Y(t)\, c$

Bemerkung: Jede normale und damit jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar.

Frage: Kann man aus einem komplexen Fundamentsystem ein reellwertiges Fundamentalsystem konstruieren?

$A v = \lambda v$ $\quad$ λ EW $\quad v$ EV

$\boxed{A\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} = \boxed{\bar{\lambda}\bar{v}}$ $\quad \Rightarrow \bar{\lambda}$ EW $\quad \bar{v}$ EV

Idee: Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein komplexer Eigenwert von $\mathbf{A}$, so ist auch der komplex–konjugierte Wert $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert. Dementsprechend ist $\bar{\mathbf{v}}$ ein Eigenvektor, falls $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor ist.

Fazit: Nicht–reelle Eigenwerte und –vektoren treten stets paarweise auf.

Ersetze jedes komplexwertige Paar von Eigenvektoren

$$\mathbf{y}^1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^2(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}$$

durch

$z \in \mathbb{C}$ $\quad \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$$\mathbf{y}^1(t) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}\right) \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{y}^2(t) = \mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} - e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}\right) \in \mathbb{R}^n$$

Ein Beispiel zu komplexen/reellen Fundamentalsystemen.

Ein komplexes Fundamentalsystem zu

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 2i, & \mathbf{v}^1 &= (1, -2i)^T \\ \lambda_2 &= 1 - 2i, & \mathbf{v}^2 &= (1, 2i)^T \end{aligned}$$

Die beiden Eigenwerte treten paarweise auf:

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \qquad \mathbf{v}^2 = \bar{\mathbf{v}}^1$$

Fortsetzung des Beispiels.

Aus den beiden komplexen Vektoren

$$\mathbf{z}^1(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z}^2(t) = e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

berechnet man die beiden reellen Vektoren

$$\mathbf{y}^1(t) = \mathrm{Re}\,\left(\mathbf{z}^1(t)\right) \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^2(t) = \mathrm{Im}\,\left(\mathbf{z}^1(t)\right)$$

also

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Damit lautet die allgemeine reelle Lösung des Systems

$$\mathbf{y}_h(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \\ 2c_1\sin(2t) - 2c_2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Fundamentalsysteme bei konstanten Koeffizienten III.

Fall 3: Die Systemmatrix $\mathbf{A}$ ist **nicht** diagonalisierbar

Hier benötigt man die Jordansche Normalform einer Matrix:

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

(vorher $\Lambda = S^{-1} A S$)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_n \end{pmatrix}$$

wobei $\mathbf{J}_i$ ein Jordan–Kästchen zum Eigenwert λ_i bezeichnet

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Fundamentalsysteme für Jordan–Kästchen.

Ein System in der Form eines Jordan–Kästchens

$z(t) = S^{-1}y(t)$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

kann unter Verwendung der Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$ explizit gelöst werden

$$e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} t^2/2! \\ t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} t^{r-1}/(r-1)! \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t/1! \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$z_2' = -2\, z_2 \qquad z_2 = z_{20}\, e^{-2t}$$

$$z_1' = -2\, z_1 + z_2$$

$$\boxed{z_1' = -2 z_1 + z_{20}\, e^{-2t}}$$

$$z_{1h}(t) = z_{10}\, e^{-2t}$$

$$z_{1p}(t) = c\, t\, e^{-2t} = z_{20}\, t\, e^{-2t}$$

Folie 24

$$z_{1p}' = c\, e^{-2t} - 2\cancel{ct}e^{-2t} \overset{!}{=} -2\cancel{ct}e^{-2t} + z_{20}\, e^{-2t} \Rightarrow z_{20} = c$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{10}\, e^{-2t} + z_{20}\, t\, e^{-2t} \\ z_{20}\, e^{-2t} \end{pmatrix} = z_{10}\, \underbrace{e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + z_{20}\, \underbrace{e^{-2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}}$$