Direkte Folgerung aus dem Gronwall–Lemma.

Satz: Für Anfangswerte $\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ seien die Lösungen $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ und $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)$ auf dem Intervall $|t - t_0| \leq \varepsilon$ definiert.

Die Konstante $L > 0$ sei eine Lipschitz–Konstante der rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf einem Quader $Q = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \tilde{Q}$.

$= \tilde{L}$

Dann gilt für $|t - t_0| \leq \varepsilon$ die Abschätzung

$$\boxed{\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \cdot \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|}$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus dem Lemma von Gronwall.

Integralform.

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0))d\tau$$

Mittels Dreicksungleichung erhalten wir damit die gewünschte Form

$$\underbrace{\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)\|}_{r(t)} \leq \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\| + L \cdot \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|\mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{z}_0)\|}_{r(\tau)} d\tau$$

$r(t)$ abschätzen.

$y' = ay \quad y(t_0) = y_0 \qquad y(t) = y_0\, e^{a(t-t_0)}$

$L = |a| \quad y(t_0) = z_0 \qquad y(t) = z_0\, e^{a(t-t_0)}$

$y(t; t_0, y_0) = y_0\, e^{a(t-t_0)}$ zu Fuß!

$y(t; t_0, z_0) = z_0\, e^{a(t-t_0)}$

$$|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| = e^{a(t-t_0)} |y_0 - z_0|$$

gut, falls $a < 0$ (Fehler wird klein)

schlecht, falls $a > 0$

---

alternativ $|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| \le e^{|a|(t-t_0)} |y_0 - z_0|$

immer schlecht!

Bemerkungen zum letzten Satz.

Bemerkungen:

- Der Satz besagt, dass die Lösung einer Anfangswertaufgabe Lipschitz-stetig von den Anfangswerten $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ abhängt.
- Für eine lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = Ly(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{mit } L > 0$$

gilt in der obigen Abschätzung für $t \geq t_0$ stets Gleichheit:

$$|y_0 e^{L(t-t_0)} - z_0 e^{L(t-t_0)}| = |y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |y_0 - z_0|$$

Für $t < t_0$ wird der Fehler allerdings erheblich überschätzt, denn

$$|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |y_0 - z_0| \to 0$$

für $t \to -\infty$.

Eine Verallgemeinerung des letzten Satzes.

Satz: Sind $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ stetig differenzierbar auf einem Quader Q mit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t,\mathbf{y}) - \mathbf{g}(t,\mathbf{y})\| &\leq \delta \\ \|\mathbf{g}(t,\mathbf{y})\| &\leq M \\ \|\mathbf{f}(t,\mathbf{y}) - \mathbf{f}(t,\tilde{\mathbf{y}})\| &\leq L\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\| \end{aligned}$$

Fehler rechte Seite δ

so gilt für die beiden Lösung $\mathbf{y}(t)$ und $\mathbf{z}(t)$ der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_0 \end{aligned}$$

Fehler AB $y_0 - z_0$

Fehler Anfangszeit $t_0 - t_1$

mit $(t_0, \mathbf{y}_0), (t_1, \mathbf{z}_0) \in Q^0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| \leq\ & \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\| e^{L|t-t_0|} + M\,|t_1 - t_0|\, e^{L|t-t_0|} \\ & + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right) \end{aligned}$$

Anwendung: Parameterabhängige Anfangswertprobleme.

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \lambda) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Beachte: Die rechte Seite hängt bei von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ab.

Dieses Problem kann auf den letzten Fall zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}'(t) &= 0, \quad \mathbf{z}(t_0) = \lambda \end{aligned}$$

Setzen wir $\mathbf{w}(t) = (\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t))^T$, so gilt mit

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{w}(t)) = (\mathbf{f}(t, \mathbf{w}(t)), 0)^T$$

und $\mathbf{w}_0 = (\mathbf{y}_0, \lambda)^T$, $\tilde{\mathbf{w}}_0 = (\mathbf{y}_0, \tilde{\lambda})^T$ die Abschätzung

$$\|\mathbf{w}(t; t_0, \mathbf{w}_0) - \mathbf{w}(t; t_0, \tilde{\mathbf{w}}_0)\| \le e^{L|t-t_0|} \cdot |\lambda - \tilde{\lambda}|$$

$y' = f(y,u)$
$u' = 0$

$w = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$ $\quad w(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ oder $w(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \tilde\lambda \end{pmatrix}$

$w = w\left(t; t_0, \begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$ oder $w\left(t; t_0, \begin{pmatrix} y_0 \\ \tilde\lambda \end{pmatrix}\right)$

$\boxed{\text{Satz von Folie 36}}$

$$\left\| w\left(t; t_0, \begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right) - w\left(t; t_0, \begin{pmatrix} y_0 \\ \tilde\lambda \end{pmatrix}\right) \right\| \leq e^{L(t-t_0)} \left\| \begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0 \\ \tilde\lambda \end{pmatrix} \right\|$$

$$= e^{L(t-t_0)} \| \lambda - \tilde\lambda \|$$

$$\left\| w\left(t; t_0, \begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right) - w\left(t; t_0, \begin{pmatrix} y_0 \\ \tilde\lambda \end{pmatrix}\right) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} y(t; t_0, y_0) \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y(t; t_0, y_0) \\ \tilde\lambda \end{pmatrix} \right\|$$

linke Seite enthält auch $\lambda - \tilde\lambda$

$y' = \lambda y \qquad y(t_0) = y_0$ $\qquad \lambda$ Abhängigkeit

$z' = \tilde{\lambda} z \qquad z(t_0) = y_0$

$$\| \underbrace{y_0 e^{\lambda(t-t_0)}}_{y} - \underbrace{y_0 e^{\tilde{\lambda}(t-t_0)}}_{z} \| = \|y_0\| \left(e^{\lambda(t-t_0)} - e^{\tilde{\lambda}(t-t_0)} \right) =$$

$$= \|y_0\| e^{\lambda(t-t_0)} \left(1 - e^{(\tilde{\lambda}-\lambda)(t-t_0)} \right)$$

Genauere Beschreibung der Abhängigkeit von $(t_0, \mathbf{y}_0)$.

Satz: Die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sei eine $\mathcal{C}^1$–Funktion auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\bar{\mathbf{y}}(t)$ sei eine auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ erklärte Lösung der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = f(t, \mathbf{y})$. Dann gilt:

1) Es gibt einen Streifen um $\bar{\mathbf{y}}(t)$

$$S_\alpha := \left\{(t, \mathbf{y})^T \ : \ t \in I \ \wedge \ \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}(t)\| \leq \alpha\right\} \subset D \quad \text{mit } \alpha > 0,$$

so dass die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ des Anfangswertproblems für alle $(t_0, \mathbf{y}_0) \in S_\alpha$ auf ganz I erklärt ist. Zusätzlich ist die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ auf $I \times S_\alpha$ eine $\mathcal{C}^1$–Funktion bezüglich aller Variablen.

2) Die so genannten Variationen

$$\mathbf{Y}(t) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad \mathbf{w}(t) := \frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^n$$

sind die Lösungen der linearen Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'(t) &= \mathbf{f}_\mathbf{y}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \cdot \mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{I}_n \\ \mathbf{w}'(t) &= \mathbf{f}_\mathbf{y}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \cdot \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{w}(t_0) = -\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0) \end{aligned}$$

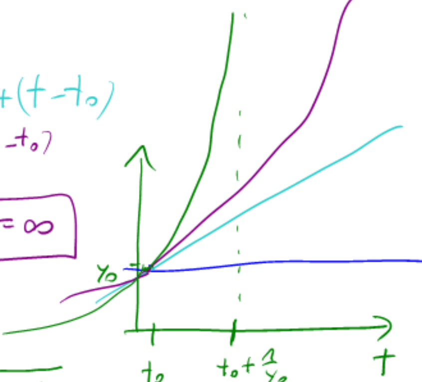
$y(t_0)=y_0$

$y'=0 \qquad y(t)=y_0$

$y'=1 \qquad y(t)=y_0+(t-t_0)$

$y'=y \qquad y(t)=y_0e^{(t-t_0)}$

$$\boxed{t_{max}=\infty}$$



$y'=y^2$ T.d.V $\quad y(t)=\dfrac{1}{\frac{1}{y_0}-(t-t_0)}$

$t_{krit,sol}=t_0+\frac{1}{y_0}$

$$\boxed{t_{max}<\infty}$$

$1<\alpha\leq 2$

$y'=y^\alpha$ T.d.V $\quad \frac{1}{1-\alpha}d\left(y^{1-\alpha}\right)=\frac{dy}{y^\alpha}=dt$

$y^{1-\alpha}-y_0^{1-\alpha}=(1-\alpha)(t-t_0) \qquad y=\left(y_0^{1-\alpha}+(1-\alpha)(t-t_0)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$\boxed{t_{max}=t_0 \; \frac{1}{1-\alpha}y_0^{1-\alpha}<\infty}$$

Beliebig "schwache" Nichtlinearität kann zu

$t_{max} < \infty$ führen!

3.1 Systeme erster Ordnung

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t)$$

mit den stetigen Funktionen $\mathbf{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Das zugehörige Anfangswertproblem

Alles ist gut

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, die für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Satz: Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{y}_p(t)}_{\text{spez. Lsg. inhomogen}} + \underbrace{\mathbf{y}_h(t)}_{\text{allg. Lsg. homogen}}$$

$$y' = Ay + h$$

$$y_p' = Ay_p + h$$

y_p sei Partikulärlösung (irgend eine Lsg)

$$(y-y_p)' = A(y-y_p)$$

$\Rightarrow$ $y-y_p$ löst das homogene Problem

geht nur, weil $Ay - Ay_p = A(y-y_p)$ linear!!!!

Das homogene Differentialgleichungssystem.

Wir betrachten die homogene Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) & = & \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ ist ein Element des Vektorraums $\mathbb{R}^n$.

Es existiert eine Basisdarstellung der Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$:
Sei $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\mathbf{v}^k$$

Mit dem Anfangswert $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ gilt weiterhin

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t_0)\mathbf{v}^k$$

bedingt hilfreich, weil

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t) v^k$$

$$y'(t) = \underline{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k'(t) v^k} \overset{!}{=} A(t) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t) v^k = \underline{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t) \, A(t) v^k}$$

?

Die Fundamentalmatrix.

Betrachten wir die n Anfangswertprobleme ($k = 1, \dots, n$)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\mathbf{y}^k(t) & = & \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}^k(t) \\ \mathbf{y}^k(t_0) & = & \mathbf{v}^k \end{array} \right.$$

lösen $\forall\, k = 1, \dots, n$

und definieren damit die Fundamentalmatrix (das Fundamentalsystem)

$$\mathbf{Y}(t) := (\mathbf{y}^1(t), \dots, \mathbf{y}^n(t)) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

so gilt der folgende Satz. $\boxed{Y'(t) = (y^{1\prime}(t), y^{2\prime}(t), \dots) = (A(t)y^1(t), A(t)y^2(t), \dots) = A(t)\,Y(t)}$

Satz: Die Matrix $\mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ sei ein Fundamentalsystem. Dann gilt:

a) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}^k(t) \qquad \text{mit } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

b) Die Fundamentalmatrix ist für alle $t \in \mathbb{R}$ regulär.

Beweis des Satzes.

Da die Vektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ eine Basis bilden, ist die Matrix $\mathbf{Y}(t_0)$ regulär, denn

$$\boxed{\mathbf{Y}(t_0)} = (\mathbf{y}^1(t_0), \ldots, \mathbf{y}^n(t_0)) = \boxed{(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n)}$$

Setzen wir

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}^k(t),$$

1. y löst y' = Ay

so berechnet man

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{y}'(t)} &= \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{d}{dt} \mathbf{y}^k(t) \xrightarrow{\text{Dgl}} \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{A}(t) \mathbf{y}^k(t) \\ &= \mathbf{A}(t) \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}^k(t) \right) = \boxed{\mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t)} \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems.

Fortsetzung des Beweises.

2. Jede Lsg von $y' = Ay$ hat die Form $y(t) = Y(t) \cdot c$

Sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine beliebige Lösung des Differentialgleichungssystems. Setzen wir

$$\mathbf{c}^* := \underbrace{\mathbf{Y}(t_0)}_{\text{regulär, also invertierbar}}{}^{-1}\mathbf{y}^*(t_0),$$

so sind

$$\mathbf{y}^*(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}^*$$

ist auch Lsg

löst $y'(t) = A(t)\, y(t)$

$y(t_0) = Y(t_0)\, c^* =$

$= Y(t_0)\, Y(t_0)^{-1}\, y^*(t_0) =$

$= y^*(t_0)$

beide Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^*(t_0) \end{cases}$$

Da die Lösung aber eindeutig ist, folgt $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{y}(t)$. Also gilt

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}^*$$

Damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt.

Fortsetzung des Beweises.

Wir zeigen nun, dass $\mathbf{Y}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ regulär ist.

Für ein festes $t_1 \neq t_0$ zeigen wir

$$\text{Für alle } \mathbf{y}^1 \in \mathbb{R}^n \text{ gibt es ein } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \boxed{\mathbf{Y}(t_1)\,\mathbf{c} = \mathbf{y}^1,}$$

denn dann ist $\mathbf{Y}(t_1)$ regulär.

Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_1) &= \mathbf{y}_1 \end{cases}$$

$\forall y_1 \in \mathbb{R}^n$

so existiert stets eine eindeutige Lösung, die nach Teil 1) in der Form

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}$$

mit einem $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ geschrieben werden kann.

Für $t = t_1$ gilt dann aber

$$\mathbf{Y}(t_1)\,\mathbf{c} = \mathbf{y}^1$$

$\forall y_1 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 4t \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

eigentlich zu einfach, weil A diagonal

$\Rightarrow$ entkoppelt.

$$y_1(t) = y_{10}\, e^{t^2}$$
$$y_2(t) = y_{20}\, e^{2t^2}$$

<u>Löse:</u> $y^{1\prime} = A y^1$, $\quad y^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y^1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$y^{2\prime} = A y^2$, $\quad y^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t^2} \end{pmatrix}$

$$Y(t) = \left(y^1(t), y^2(t)\right) = \begin{pmatrix} e^{t^2} & 0 \\ 0 & e^{2t^2} \end{pmatrix}$$

Allg. Lsg $= y(t) = Y(t) \cdot c$

Falls $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} Y(0) \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot c = c$

$$y(t) = Y(t) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t^2} \end{pmatrix}$$

Die Wronski–Determinante.

Die $\mathcal{C}^1$–Funktion

$$W(t) = \det\left(\mathbf{Y}(t)\right)$$

nennt man die Wronski–Determinante zum Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t)$$

Die Wronski–Determinante ist selbst Lösung einer skalaren linearen Differentialgleichung

$$W'(t) = \mathrm{Spur}\left(\mathbf{A}(t)\right) \cdot W(t) \qquad \text{z.zeigen}$$

Mittels Trennung der Variablen erhält man die Lösungsdarstellung

$$\det(Y(t)) = W(t) = \underbrace{W(t_0)}_{\det(Y(t_0)) \neq 0} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Spur}\left(\mathbf{A}(\tau)\right) d\tau \right)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spur}(A(t)) = a_{11} + a_{22}$$

$$W(t) = \det(Y(t)) = \det \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 \\ y_2^1 & y_2^2 \end{pmatrix} = y_1^1 y_2^2 - y_2^1 y_1^2$$

$$W'(t) = (\qquad\qquad)' = y_1^{1'} y_2^2 + y_1^1 y_2^{2'} - y_2^{1'} y_1^2 - y_2^1 y_1^{2'} =$$

einsetzen

$$= (y_1^1 a_{11} + y_2^1 a_{12}) y_2^2 + \ldots \quad - \quad =$$

hoffentlich

$$= (a_{11} + a_{22})(y_1^1 y_2^2 - y_2^1 y_1^2)$$

Das inhomogene Differentialgleichungssystem.

Wir betrachten jetzt die inhomogene Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung verwenden wir wie bei einer skalaren Gleichung eine Variation der Konstanten

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$$

Setzt man diesen Ansatz in die inhomogene Gleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{Y}'(t)\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \end{aligned}$$