Kapitel 2. Theorie der Anfangswertaufgaben

Wir betrachten in diesem Abschnitt stets das Anfangswertproblem

y nVektor

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

mit der rechten Seite $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, definiert auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, und dem Anfangswert $\mathbf{y}_0 \in D$.

Die Fragen, die wir beantworten wollen, sind

1. Existiert eine Lösung $\mathbf{y}(t)$ in einer Umgebung $|t - t_0| < \varepsilon$ der Anfangszeit?
2. Ist die Lösung, falls sie existiert, eindeutig bestimmt?
3. Wie weit lässt sich die Lösung in der Zeit fortsetzen?
4. Wie verändert sich die Lösung bei einer Störung der Anfangsdaten $(t_0, \mathbf{y}_0)$ oder der rechten Seite $f(t, \mathbf{y})$?

$y' = \sqrt{|y|}$ $\quad y(0) = 1$

in der Nähe von $y = 1$ $\quad |y| = y$

$y' = \sqrt{y}$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dt$$

Kein Auffällige Stelle!

$$2(\sqrt{y} - \sqrt{y_0}) = t - t_0$$

$$y = \left(\sqrt{y_0} + \frac{1}{2}(t - \cancel{t_0})\right)^2$$

falls $y(0) = 0$

$$2(\sqrt{y} - \sqrt{0}) = t - t_0 \qquad y = \frac{1}{4}(t - \cancel{t_0})^2 = \frac{1}{4}t^2$$

$f(y) = \sqrt{|y|}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, stetig

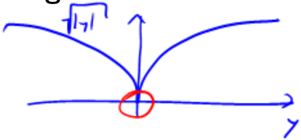
$\Rightarrow$ Peano gilt.

2.1 Existenz und Eindeutigkeit für Anfangswertaufgaben

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

autonom

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \qquad y(0) = 0$$

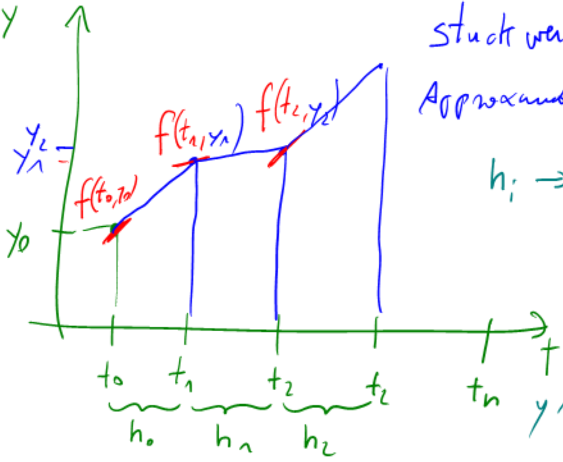


Diese Gleichung besitzt beliebig viele Lösungen. Für $\alpha, \beta > 0$ sind die Lösungen

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t+\alpha)^2 & : \quad -\infty < t \leq -\alpha \\ 0 & : \quad -\alpha < t \leq \beta \\ \frac{1}{4}(t-\beta)^2 & : \quad \beta < t < \infty \end{cases}$$

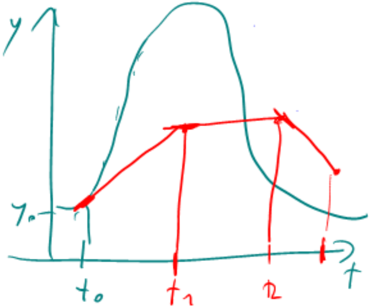
Man beachte die folgenden Eigenschaften der rechten Seite.

1. Die rechte Seite ist stetig und beschränkt auf $D = \mathbb{R} \times [-a, a]$, $a > 0$,
2. Die rechte Seite ist auf D nicht Lipschitz–stetig,
3. Die rechte Seite ist bei $y = 0$ nicht differenzierbar.



stückweise lineare Approximation

$h_i \to 0$



$y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0 = y_0$

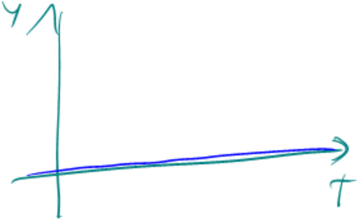
$y_0 = 0$

$y_1 = y_0 + h_1 \cdot \overset{\sqrt{|y_0|}}{0} = y_0 = 0$

$y_2 = y_1 + h_2 \cdot 0 = 0$

$\vdots$

$y_n = 0$



Nulllösg.

$y' = y \qquad y(t_0) = y_0$

$t_1 = t_0 + h$ equidistant

$t_i = t_0 + ih \qquad t_n = t_0 + nh, \quad h = \frac{t_n - t_0}{n}$

$y_0 = y_0$

$y_1 = y_0 + h \underbrace{y_0}_{f(t_0, y_0)} = y_0(1+h)$

$y_2 = y_1 + h y_1 = y_1 (1+h) = y_0 (1+h)^2$

$\boxed{y_n =} = y_0 (1+h)^n = y_0 \left(1 + \frac{t_n - t_0}{n}\right)^n =$

$\rightarrow \boxed{y_0 e^{t_n - t_0}}$

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} e^x$

Der Existenzsatz von Peano.

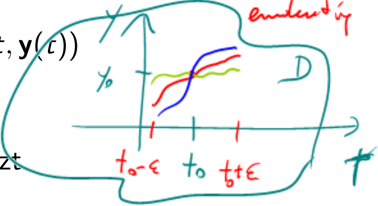
Satz: (Existenzsatz von Peano (1890)) Die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sei auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und es gelte $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$.

nicht notwendigerweise eindeutig

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem

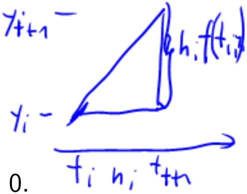
$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

im Intervall $|t - t_0| < \varepsilon$ eine Lösung besitzt.



Konstruktiver Beweis mittels des Eulerschen–Polygonzug–Verfahrens:
Rekursive Berechnung einer (diskreten) Näherungslösung

$$t_{i+1} := t_i + h_i, \qquad \mathbf{y}_{i+1} := \mathbf{y}_i + h_i f(t_i, \mathbf{y}_i)$$



mit den Startwerten $(t_0, \mathbf{y}_0)$ und den Schrittweiten h_i.
Näherungslösungen **konvergieren** gegen eine Lösung für $h_i \to 0$.

Fortsetzbarkeit der lokalen Lösung.

Bemerkung: Jede Lösung eines Anfangswertproblems lässt sich auf ein maximales Existenzintervall $-\infty \leq t_{\min} < t < t_{\max} \leq \infty$ fortsetzen.

Der Graph $(t, \mathbf{y}(t))$ der Lösung kommt dabei für $t \to t_{\min}$ bzw. $t \to t_{\max}$ dem Rand von D beliebig nahe, d.h. jeder Häufungspunkt von $(t, \mathbf{y}(t))$ für $t \to t_{\min}$ bzw. $t \to t_{\max}$ liegt auf dem Rand ∂D.

Beispiel:

- Die Lösung $y(t) = \exp(t)$ des Anfangswertproblems

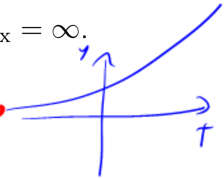
$y(t) = 1e^t = e^t$

$f(t,y) = y$

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Also ist $t_{\min} = -\infty$ und $t_{\max} = \infty$. Es ist $D = \mathbb{R}^2$ und

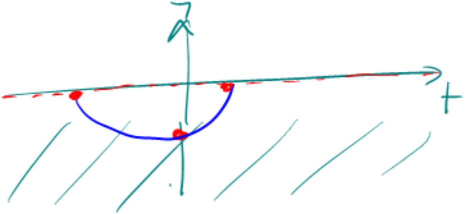
$$\lim_{t \to t_{\min}} (t, y(t)) \quad = \quad (-\infty, 0) \in \partial D$$



$$\lim_{t \to t_{\max}} (t, y(t)) \quad = \quad (\infty, \infty) \in \partial D$$

$$y' = -\frac{t}{y} \qquad y(0) = -r$$

$$y(t) = -\sqrt{r^2 - t^2}$$



$t_{min} = -r \qquad t_{max} = +r$

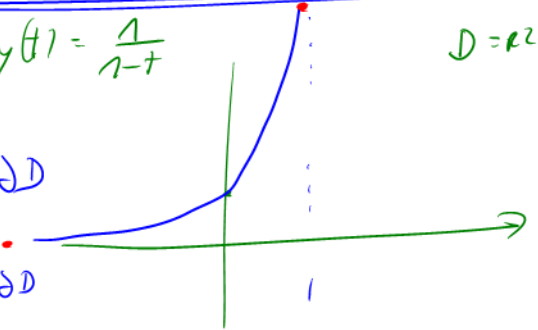
$y' = y^2, \quad y(0) = 1 \qquad y(t) = \frac{1}{1-t} \qquad D = \mathbb{R}^2$

$t_{min} = -\infty$

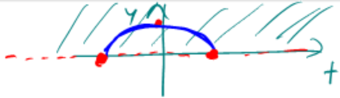
$(t, y(t)) \xrightarrow{t \to -\infty} (-\infty, 0) \in \partial D$

$t_{max} = 1$

$(t, y(t)) \xrightarrow{t \to +\infty} (1, \infty) \in \partial D$



Weitere Beispiele zur Fortsetzbarkeit.



Beispiel:

- Das Anfangswertproblem

$f(t,y) = -\frac{t}{y}$

$$y' = -\frac{t}{y}, \quad y(0) = r > 0, \quad \boxed{D = \mathbb{R} \times (0, \infty)}$$

besitzt die Lösung $\boxed{y(t) = \sqrt{r^2 - t^2}}$. Dabei ist $t_{\min} = -r$, $t_{\max} = r$ und

$$\lim_{t \to t_{\min}} (t, y(t)) = (-r, 0) \in \partial D$$

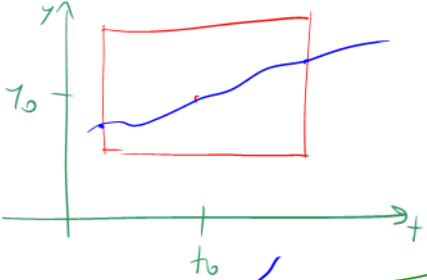
- Für das Anfangswertproblem

$f(t,y) = y^2$

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1, \quad \boxed{D = \mathbb{R}^2}$$

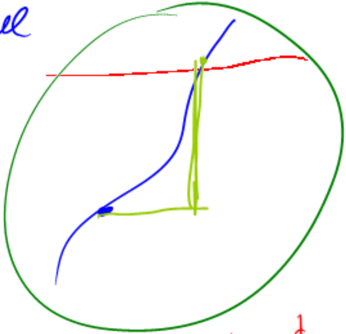
erhält man mittels Trennung der Variablen die Lösung

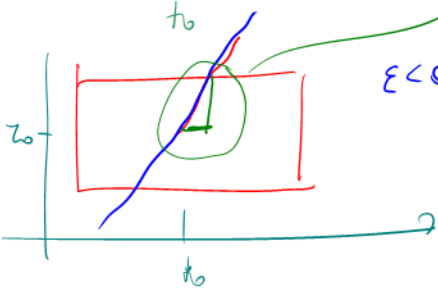
$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \qquad -\infty = t_{\min} < t < t_{\max} = 1$$



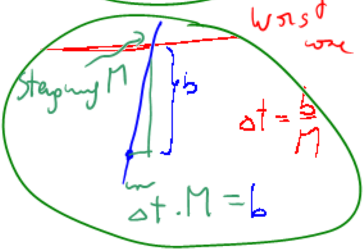
1. Fall

$\varepsilon = a$





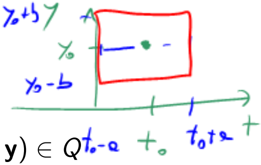
$\varepsilon < a$



Der Existenz– und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf.

Satz: (Picard–Lindelöf) Die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sei stetig auf dem Quader

$$Q := \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ |t - t_0| \leq a \wedge \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_\infty \leq b\}$$



Ferner gelte mit den beiden Konstanten $M, L > 0$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| &\leq M & \forall (t, \mathbf{y}) \in Q \\ \|\mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| &\leq L\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\| & \forall (t, \hat{\mathbf{y}}), (t, \mathbf{y}) \in Q \end{aligned}$$

(Lipschitz–Bedingung)

Dann besitzt das Anfangswertproblem $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{y}(t)$, die mindestens im Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ mit

$$\varepsilon := \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$$

definiert ist.

$y' = \sqrt{|y|} \quad y(0) = 0$

Ist $f(y) = \sqrt{|y|}$ Lipschitz bei $y = 0 \in \mathbb{Q}$

es müßte gelten: $\exists L > 0$

$$\left| \sqrt{|\hat{y}|} - \sqrt{|y|} \right| \leq L \, |\hat{y} - y| \quad \forall y, \hat{y} \in \mathbb{Q}$$

$$= L \left| \sqrt{|\hat{y}|} - \sqrt{|y|} \right| \left| \sqrt{|\hat{y}|} + \sqrt{|y|} \right|$$

$\Rightarrow 1 \leq L \left| \sqrt{|\hat{y}|} + \sqrt{|y|} \right| \quad \Rightarrow \quad L \geq \dfrac{1}{\left| \sqrt{|\hat{y}|} + \sqrt{|y|} \right|}$

$\hat{y}, y$ beliebig nahe bei $0 \Rightarrow L$ beliebig groß

$\Rightarrow \nexists L > 0 \ldots$ nicht Lipschitz bei 0

Beweisidee zum Satz von Picard–Lindelöf.

Durch Integration der Differentialgleichung folgt

$y = \phi(y)$

Fixpunktgleichung

$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau))\, d\tau \quad = \phi(y)(t)}$$

Lösung dieser Fixpunktgleichung mit Hilfe einer Fixpunktiteration:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(0)}(t) &= \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}^{(k+1)}(t) &= \mathbf{y}^{(k)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}^{(k)}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

$$y^{(1)}(t) = y^{0}(t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{0}(\tau))\, d\tau$$

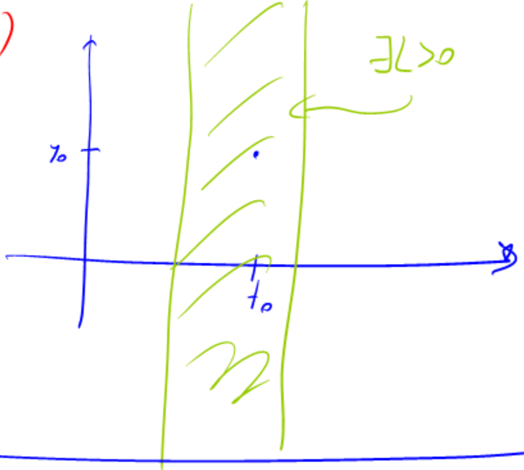
$$y^{k}(t) \xrightarrow{k \to \infty} y(t)$$

Hoffnung

Die Iteration liefert in jedem Schritt eine genauere Näherungslösung:

Verfahren der sukzessiven Approximation

Beweis läuft damit analog zum Beweis des Fixpunktsatzes (Analysis II) ad a)



$\Rightarrow \varepsilon = a$

f: stetig diffbar

$$f(\hat{y}) = f(y) + f'(z)(\hat{y} - y) \qquad z \in [y, \hat{y}]$$

$$|f(\hat{y}) - f(y)| \leq |f'(z)|\,|\hat{y} - y| \qquad L = \max_{z \in [y,\hat{y}]} |f'(z)|$$

Lipschitz–Bedingung und globale Existenz.

Bemerkungen:

- Erfüllt die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n$ die Lipschitz–Bedingung

a)

$$\|\mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|,$$

so besitzt das Anfangswertproblem mit $t_0 \in [t_1, t_2]$ eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz $[t_1, t_2]$ erklärt ist. Man nennt dies Globale Existenz.

- Ein lineares Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $\mathbf{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{(n,n)}$, $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

- Ist $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf dem Quader Q eine C^1–Funktion, so erfüllt $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ dort die Lipschitz–Bedingung.

Ein Beispiel zum Verfahren der sukzessiven Approximation.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) & = & y(t) \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

Dann gilt mit $y^{(0)}(t) = 1$:

$$y^{(1)}(t) = y^{(0)}(t) + \int_0^t y^{(0)}(\tau)d\tau = 1 + t$$

$$y^{(2)}(t) = y^{(1)}(t) + \int_0^t y^{(1)}(\tau)d\tau =$$

$$= 1 + t + t + \frac{t^2}{2} =$$

$$= 1 + 2t + \frac{t^2}{2} + \ldots$$

Mit Induktion beweist man dann die Formel

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} t^j$$

Für $k \to \infty$ folgt demnach

$$y(t) = \lim_{k\to\infty} y^{(k)}(t) = \boxed{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j = \exp(t)}$$

2.2 Abhängigkeit von Parametern, Stabilität

Wir betrachten wieder die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) & = & \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) & = & \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

mit einer rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, die auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar sei.

Nach dem Satz von Picard–Lindelöf existiert dann für $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$ eine eindeutig bestimmte lokale Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, die wir in D maximal fortsetzen können.

Frage: Was passiert mit dieser Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, wenn man den Startwert $(t_0, \mathbf{y}_0)$ ein wenig verschiebt?

Gronwall (Spezialfall)

$$r(t) = \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} r(\sigma)\, d\sigma \qquad r(t_0) = \alpha$$

Ableitung:

$$\boxed{r'(t) = \beta\, r(t) \quad \Big| \quad r(t_0) = \alpha}$$

$$r(t) = \alpha\, e^{\beta(t-t_0)}$$

Das Lemma von Gronwall.

Satz: (Lemma von Gronwall) Gilt für eine auf $|t - t_0| \leq \varepsilon$ stetige Funktion $r(t)$ eine Abschätzung der Form

$$\boxed{r(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} r(\tau) d\tau} \quad \text{mit } \alpha \geq 0 \text{ und } \beta > 0,$$

so gilt für alle $|t - t_0| \leq \varepsilon$ die Abschätzung

$$\boxed{r(t) \leq \alpha\, e^{\beta|t-t_0|}}$$

Beweis: Wir definieren für $t \geq t_0$

$$u(t) := e^{-\beta t} \int_{t_0}^{t} r(\tau) d\tau$$

Damit ergibt sich für die Ableitung von $u(t)$ die Beziehung

$$u'(t) = -\beta u(t) + e^{-\beta t} r(t).$$

Fortsetzung des Beweises.

Aus der Voraussetzung

$$r(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} r(\tau) d\tau \quad \text{mit } \alpha \geq 0 \text{ und } \beta > 0,$$

erhalten wir unter Verwendung der Definition von $u(t)$ gerade

$$e^{-\beta t} r(t) \leq e^{-\beta t} \alpha + \beta u(t)$$

und daher folgt

$$u'(t) = -\beta u(t) + e^{-\beta t} r(t) \leq \alpha e^{-\beta t}$$

Wir schreiben diese Ungleichung als

$$\alpha e^{-\beta t} - u'(t) \geq 0$$

und integrieren von t_0 bis t.

Fortsetzung des Beweises.

Integration von

$$u'(t) \le \alpha e^{-\beta t}$$

über $[t_0, t]$ ergibt mit $u(t_0) = 0$

$$u(t) \le \frac{\alpha}{\beta}\left(e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t}\right)$$

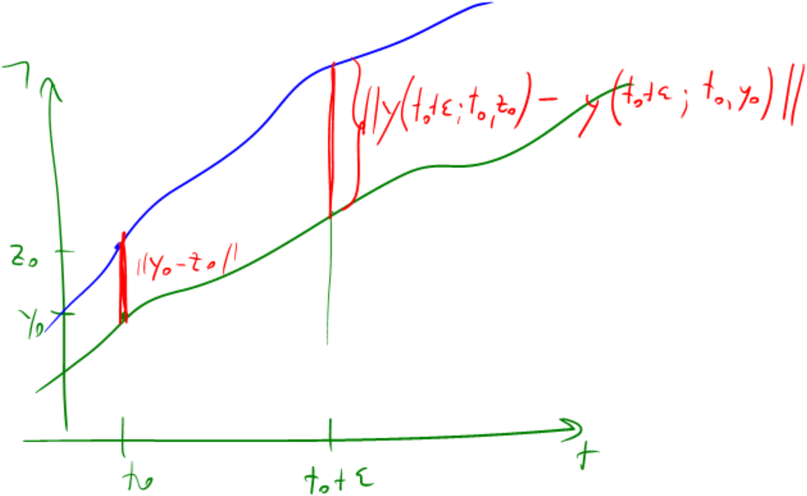
Nun gilt

$$\begin{aligned} r(t) &\le \alpha + \beta e^{-\beta t} u(t) \\ &\le \alpha + \alpha e^{\beta t}\left(e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t}\right) \\ &= \alpha e^{\beta(t-t_0)} \end{aligned}$$

Dies ergibt für $t \ge t_0$ die gewünschte Abschätzung.

Für $t < t_0$ folgt die Aussage mit einer Transformation durch Spiegelung,

$$\tilde{r}(t) := r(2t_0 - t)$$



$\|y(t_0+\varepsilon; t_0, z_0) - y(t_0+\varepsilon; t_0, y_0)\|$
z_0
$\|y_0 - z_0\|$
y_0
t_0
$t_0+\varepsilon$
t

Direkte Folgerung aus dem Gronwall–Lemma.

Satz: Für Anfangswerte $\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ seien die Lösungen $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ und $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)$ auf dem Intervall $|t - t_0| \leq \varepsilon$ definiert.

Die Konstante $L > 0$ sei eine Lipschitz–Konstante der rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf einem Quader $Q = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \tilde{Q}$.

$= \tilde{L}$

Dann gilt für $|t - t_0| \leq \varepsilon$ die Abschätzung

$$\boxed{\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \cdot \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|}$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus dem Lemma von Gronwall.

Integralform.

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0))d\tau$$

Mittels Dreicksungleichung erhalten wir damit die gewünschte Form

$$\underbrace{\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)\|}_{r(t)} \leq \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\| + L \cdot \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|\mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{z}_0)\|}_{r(\tau)} d\tau$$

r(t) abschätzen.

Bemerkungen:

- Der Satz besagt, dass die Lösung einer Anfangswertaufgabe Lipschitz-stetig von den Anfangswerten $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ abhängt.
- Für eine lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = Ly(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{mit } L > 0$$

gilt in der obigen Abschätzung für $t \geq t_0$ stets Gleichheit:

$$|y_0 e^{L(t-t_0)} - t_0 e^{L(t-t_0)}| = |y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |y_0 - z_0|$$

Für $t < t_0$ wird der Fehler allerdings erheblich überschätzt, denn

$$|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |y_0 - z_0| \to 0$$

für $t \to -\infty$.