Typ E: Riccatische Differentialgleichungen.

Riccatische Differentialgleichungen sind von der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t)$$

Sie lassen sich nur in speziellen Fällen in geschlossener Form lösen:

Ist eine spezielle Lösung $y_p(t)$ bekannt, so liefert die Substitution

$$u(t) := \frac{1}{y(t) - y_p(t)}$$

beziehungsweise

$$y(t) = y_p(t) + \frac{1}{u(t)}$$

die lineare Gleichung

$$u'(t) - [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u(t) = b(t)$$

Ein Beispiel für eine Riccatische Differentialgleichung.

Wir betrachten die Gleichung

$$y'(t) = -2t + 3ty(t) - ty^2(t),$$

die $y_p(t) = 1$ als spezielle Lösung besitzt.

$y'(t) = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$

Die Substitution $u(t) = 1/(y(t) - 1)$ bzw. $y(t) = 1 + 1/u(t)$ liefert

$$\begin{aligned}\boxed{u'(t)} &= -u^2 y' = -u^2(-2t + 3ty(t) - ty^2(t)) \\ &= -u^2\left(-2t + 3t + \frac{3t}{u} - t - \frac{2t}{u} - \frac{t}{u^2}\right) = \boxed{-tu(t) + t}\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Gleichung ist

$u_h(t) = c e^{-\int t\,dt} = c e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$u(t) = \underbrace{1}_{u_p} + \underbrace{C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}_{u_h}$$

1. Var. d. Kons
2. Ansatz
3. RdA

und daher gilt

$$y(t) = 1 + \frac{1}{1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$$

Ein Beispiel für eine Riccatische Differentialgleichung.

Wir betrachten die Gleichung

$$y'(t) = -2t + 3ty(t) - ty^2(t),$$

$y'(t) = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}$

die $y_p(t) = 1$ als spezielle Lösung besitzt.
Die Substitution $u(t) = 1/(y(t)-1)$ bzw. $y(t) = 1 + 1/u(t)$ liefert

$$\begin{aligned} \boxed{u'(t)} &= -u^2y' = -u^2(-2t + 3ty(t) - ty^2(t)) \\ &= -u^2\left(-2t + 3t + \frac{3t}{u} - t - \frac{2t}{u} - \frac{t}{u^2}\right) = \boxed{-tu(t) + t} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Gleichung ist $u_h(t) = ce^{-\int t\,dt} = c\,e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$u(t) = \underbrace{1}_{u_p} + \underbrace{C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}_{u_h}$$

1. Var. d. Kons
2. Ansatz
3. RdA

und daher gilt

$$y(t) = 1 + \frac{1}{1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$$

Gegeben sei die Differentialgleichung 1.Ord., skalar, nicht autonom, explizit nur dann, falls $h \neq 0$

$$g(t, y(t)) + h(t, y(t))\, y'(t) = 0$$

Definition: Existiert eine Funktion $\Phi(t, y)$ mit

$$\frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial t} = g(t,y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial y} = h(t,y),$$

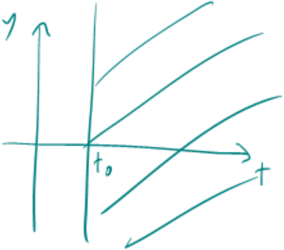
so nennt man die Differentialgleichung $g + hy' = 0$ exakt.

Dann folgt

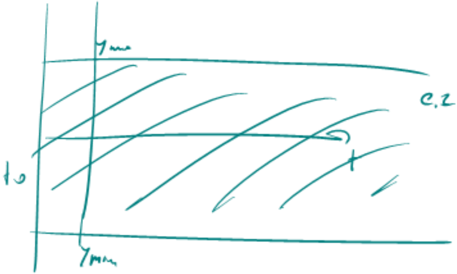
$$\frac{d\Phi(t,y(t))}{dt} = \overbrace{\frac{\partial \Phi(t,y(t))}{\partial t}}^{g} + \overbrace{\frac{\partial \Phi(t,y(t))}{\partial y}}^{h} y'(t) = 0$$

und die Lösungen der Gleichung sind gegeben durch

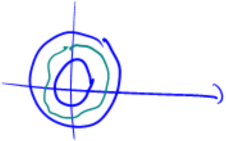
implizit $$\Phi(t, y(t)) = C \in \mathbb{R}$$



e.l.



e.z



Analysis III: Integrabilitätsbedingung bei Vektorfeldern.

Definieren wir ein Vektorfeld $F(t, y)$ durch $\boxed{h_t = \phi_{yt} = \phi_{ty} = g_y}$ Forderung

$$F(t, y) := (g(t, y), h(t, y))^T, \qquad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

so heißt Differentialgleichung exakt, falls F ein Potential besitzt: d.h. $F = \nabla \phi$

$$g(t, y) = \Phi_t(t, y), \quad h(t, y) = \Phi_y(t, y) \qquad \Phi \in \mathcal{C}^1$$

Dies geht nur mit einer zusätzlichen Eigenschaft des Potentials F, der Integrabilitätsbedingung

Satz: Sind die beiden Funktionen $g(t, y)$ und $h(t, y)$ stetig differenzierbar und ist der Definitionsbereich einfach zusammenhängend, so besitzt das Vektorfeld F ein Potential Φ genau dann, wenn im Definitionsbereich die Bedingung

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(t, y)}$$

erfüllt ist.

$$\phi(t,y) = \int_{t_0}^{t} g(\tau, y_0)\,d\tau + \int_{y_0}^{y} h(t,\eta)\,d\eta$$

$$\phi_y(t,y) = h(t,y) \quad \checkmark$$

$$\phi_t(t,y) = g(t,y_0) + \int_{y_0}^{y} h_t(t,\eta)\,d\eta = g(t,y_0) + \int_{y_0}^{y} g_y(t,\eta)\,d\eta =$$

$$h_t = g_y \qquad = \cancel{g(t,y_0)} + g(t,y) - \cancel{g(t,y_0)} = g(t,y)$$

Berechnung des Potentials einer exakten DGL.

Das Potential $\Phi(t, y)$ einer exakten Differentialgleichung kann mit Kurvenintegralen berechnet werden:

$$\Phi(t, y) = \int_{c_{(t,y)}} F(\tau, \eta) d(\tau, \eta)$$

Dabei ist $c_{(t,y)}$ eine $\mathcal{C}^1$–Kurve, die den festen Punkt (t_0, y_0) mit dem variablen Punkt (t, y) verbindet.

Beispiel: Im Zweidimensionalen $(D = \mathbb{R}^2)$ kann man den Hakenweg

$$(t_0, y_0) \quad \rightarrow \quad (t, y_0) \quad \rightarrow \quad (t, y)$$

wählen und erhält für das Potential die Darstellung

$$\Phi(t, y) = \int_{t_0}^{t} g(\tau, y_0) d\tau + \int_{y_0}^{y} h(t, \eta) d\eta$$

Ein Beispiel für eine exakte Differentialgleichung.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\overbrace{(1 + 2ty + y^2)}^{g} + \overbrace{(t^2 + 2ty)}^{h}y' = 0 \qquad ((t, y) \in \mathbb{R}^2)$$

Es gilt

$$h_t = g_y$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^2 + 2ty) = \frac{\partial}{\partial y}(1 + 2ty + y^2) = 2(t + y)$$

Integrabilitätsb. erfüllt

und die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt, d.h. die Gleichung ist exakt.

Erster Schritt zur Berechnung des Potentials

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = g = 1 + 2ty + y^2$$

Eine Integration bezüglich t ergibt

$$\Phi(t, y) = t(1 + y^2) + t^2 y + C(y)$$

Beachte: Integrationskonstante kann von y abhängen!

Fortsetzung des Beispiels.

Nach dem ersten Schritt gilt

$$\Phi(t,y) = t(1+y^2) + t^2 y + C(y)$$

Zweiter Schritt: Die Funktion $C(y)$ kann aus der Integrabilitätsbedingung bestimmt werden.

Es muss gelten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = h = t^2 + 2ty$$

Einsetzen des Ergebnisses aus dem ersten Schritt liefert

$$2ty + t^2 + C'(y) = t^2 + 2ty \quad \Rightarrow \quad C(y) = \text{ const.}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch die implizite Gleichung

$$\boxed{\phi(t,y(t)) = \quad t(1+y^2(t)) + t^2 y(t) = C}$$

Die Methode des integrierenden Faktors.

Gegeben sei die nicht exakte Differentialgleichung

$$g(t,y) + h(t,y)\,y' = 0 \qquad g_y \neq h_t$$

Wir suchen nun eine Funktion $m(t,y)$ so, dass die Gleichung

$$m(t,y)g(t,y) + m(t,y)h(t,y)\,y' = 0$$

eine exakte Differentialgleichung ist.

Suche ϕ für mg, mh

$\phi_t = mg$

$\phi_y = mh$

Bedingung: Die Integrabilitätsbedingungen müssen erfüllt sein, d.h.

$$\phi_{yt} - \phi_{ty} = \frac{\partial}{\partial t}(m \cdot h) - \frac{\partial}{\partial y}(m \cdot g) = 0$$

Daraus ergibt sich die Bedingung:

Partielle Dgl für m!

$$\left(h\frac{\partial m}{\partial t} - g\frac{\partial m}{\partial y}\right) + m\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0$$

Zwei einfache Sonderfälle.

Die Bedingung

$$\left(h\frac{\partial m}{\partial t} - g\frac{\partial m}{\partial y}\right) + m\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0$$

wird in den beiden folgenden Spezialfällen deutlich einfacher.

falls $=0$ Integrabilitäts B. erfüllt $\Downarrow$ $m=1$ Lsg.

- 1. Fall: Wir nehmen an, dass $m = m(t)$ nur von t abhängt.

$$\frac{dm}{dt} = - \underbrace{\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)/h\right]}_{\text{Bed.: hängt nur von } t \text{ ab}} \cdot m(t)$$

- 2. Fall: Wir nehmen an, dass $m = m(y)$ nur von y abhängt.

$$\frac{dm}{dy} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)/g\right]}_{\text{Bed.: hängt nur von } y \text{ ab}} \cdot m(y)$$

Beispiel mit integrierendem Faktor.

Gegeben sei die nicht exakte Gleichung h

$$\underbrace{(1-ty)}_{g}+\underbrace{(ty-t^2)}_{h}y'=0$$

$-t = g_y \neq h_t = y-2t$

Es gilt:

$$\boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)/h=\frac{y-t}{ty-t^2}=\frac{1}{t}}$$

Unser Ansatz lautet

$d \ln m = \frac{dm}{m} = -\frac{dt}{t} = d \ln t^{-1}$ $\quad m = \frac{1}{t}$

$$\frac{dm}{dt}=-\frac{1}{t}\cdot m(t)\quad\Rightarrow\quad m(t)=\frac{1}{t}$$

Damit ist die Differentialgleichung $\tilde{h} = mh$

$-1 = \tilde{g}_y = \tilde{h}_t = -1$

$\cdot\, m = \frac{1}{t} \longrightarrow$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{t}-y\right)}_{\tilde{g}=mg}+\underbrace{(y-t)}_{\tilde{h}}y'=0\qquad(t\neq 0)$$

$\phi = \int \tilde{g}\, dt = \ln|t| - ty + C(y)$

exakt und die (implizite) Lösung ist gegeben durch

$\phi_y = -t + C'(y) \overset{!}{=} \tilde{h} = y-t$

$C'(y) = y$

$C(y) = \frac{y^2}{2}$

$$\boxed{\Phi(t,y(t))=\ln|t|-ty(t)+\frac{1}{2}y^2(t)=\ \text{const.}}$$

1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

i.e. $y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$

Typ A: Gegeben sei eine Gleichung zweiter Ordnung der Form

$$y''(t) = f(t, y'(t))$$

keine explizite Abh von $y(t)$

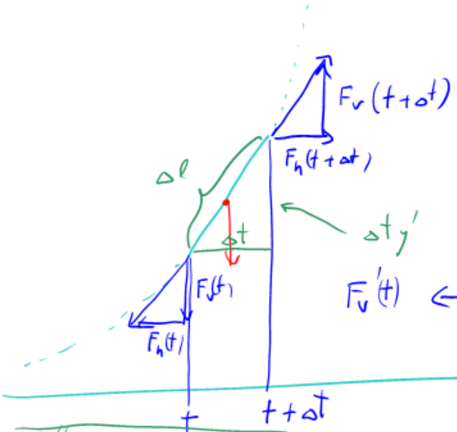
Beachte: die rechte Seite der DGL hängt nicht von $y(t)$ ab.

Setzen wir $z(t) := y'(t)$, so erhalten wir eine Gleichung erster Ordnung:

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

Läßt sich diese Gleichung lösen, so folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau$$



$F_v = y' F_h$ Gewichts~~massendichte~~

$$F_v(t+\Delta t) = F_v(t) + \rho\, \Delta l$$

$$\Delta l = \sqrt{\Delta t^2 + (\Delta t\, y')^2} = \Delta t \sqrt{1+(y')^2}$$

$$F_v'(t) \longleftarrow \frac{F_v(t+\Delta t) - F_v(t)}{\Delta t} = \rho \sqrt{1+(y')^2}$$

$$F_v' = (F_h y')' = F_h y''$$

$F_h = \text{const}$

$$\boxed{y'' = \frac{\rho}{F_h}\sqrt{1+y'^2}}$$

$$y(t) = \frac{1}{k} \cosh(kt + c_1) + c_2$$

$$\left.\begin{aligned} y(t_1) &= y_1 \\ y(t_2) &= y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1, c_2 \text{ fixieren}$$

Ein Beispiel zu Typ A.

Die sogenannte Kettenlinie ist die Lösung der Gleichung

$$y''(t) = k\sqrt{1 + (y'(t))^2}$$

Die Subtitution $z(t) := y'(t)$ ergibt die Gleichung erster Ordnung

$$z'(t) = k\sqrt{1 + z^2(t)} \qquad \text{Separierbar}$$

Mittels Trennung der Variablen findet man

$$\operatorname{arsinh} z = \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2(t)}} = k \int dt = kt + c_1$$

und daher

$$y'(t) = z(t) = \sinh(kt + c_1)$$

mit der Integrationskonstanten c_1.

Integration von $z(t)$ ergibt die Kettenlinie $y(t)$ in der Form

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{k}\cosh(kt + c_1) + c_2}$$

Typ B

$$y'' = -y \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad v_y = \frac{-y}{v} \qquad v v_y = -y$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{c^2}{2} \qquad v^2 = c^2 - y^2 \qquad v = \sqrt{c^2 - y^2}$$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} = \frac{1}{\sqrt{c^2-y^2}}, \qquad \frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}} = dt$$

$$\arcsin \frac{y}{c} = \int \frac{dy}{\sqrt{c^2-y^2}} = \int dt = t - t_0$$

$$\boxed{y = c \sin(t - t_0)}$$

Typ C:

$$y'' = -y \qquad \left(\frac{y'^2}{2}\right)' = y' y'' = -y y' = -\left(\frac{y^2}{2}\right)' \quad \Rightarrow \quad y^2 + y'^2 = c^2$$

$$y' = \sqrt{c^2 - y^2} = \ldots\ldots$$ wie bei Typ B

1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Typ B: Gegeben sei eine autonome Gleichung zweiter Ordnung

$$y''(t) = f(y(t), y'(t))$$

Nimmt man an, dass die Lösung auf einem Intervall streng monoton ist, so existiert die Umkehrabbildung $t = t(y)$ und

$$\boxed{\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y'(t(y))} = \frac{1}{v(y)}}$$

Die Substitution $\boxed{v(y) := y'(t(y))}$ ergibt die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\boxed{\frac{dv}{dy} = y''(t(y)) \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} f(y, v(y))} \qquad \boxed{v_y = \frac{f(y,v)}{v}}$$

Ist die Lösung $v(y)$ bekannt, so erhält man $y(t)$ durch Auflösen von

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} \quad \overset{\text{Separieren}}{\Rightarrow} \quad t - t_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{v(y)}$$

1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Typ C: Betrachte den Spezialfall einer autonomen Gleichung der Form

$$y''(t) = f(y(t)) \qquad \text{nicht } y' \text{ abh}$$

Man berechnet

$$y'y'' = f(y)y' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(y')^2 = \int f(y)dy =: F(y) + C$$

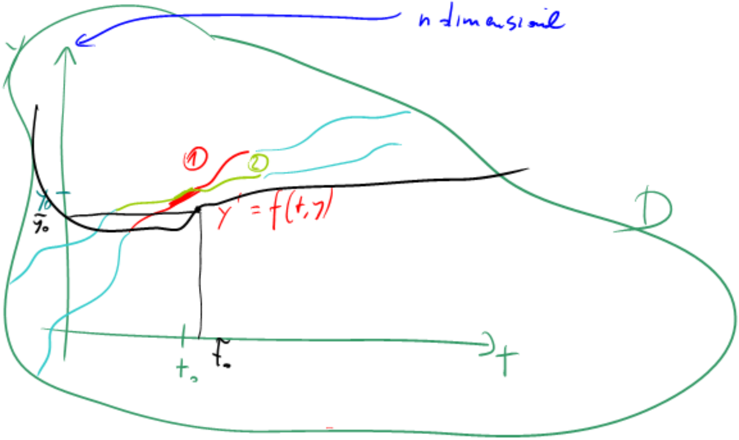
$$\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{2(F(y)+C)}$$

Die Funktion $y(t)$ sei auf einem gewissen Bereich invertierbar

$$\frac{dt}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(F(y)+C)}}$$

Dann erhält man $y(t)$ durch Auflösen von

$$t = t(y) = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2(F(y)+C)}}$$


n dimensional
y
$\mathcal{D}$
①
②
y_0
$\tilde{y}_0$
$y' = f(t,y)$
t_0
$\tilde{t}_0$
t

Kapitel 2. Theorie der Anfangswertaufgaben

Wir betrachten in diesem Abschnitt stets das Anfangswertproblem

y n Vektor

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

mit der rechten Seite $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, definiert auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, und dem Anfangswert $\mathbf{y}_0 \in D$.

Die Fragen, die wir beantworten wollen, sind

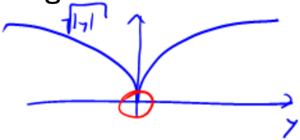
1. Existiert eine Lösung $\mathbf{y}(t)$ in einer Umgebung $|t - t_0| < \varepsilon$ der Anfangszeit?
2. Ist die Lösung, falls sie existiert, eindeutig bestimmt?
3. Wie weit lässt sich die Lösung in der Zeit fortsetzen?
4. Wie verändert sich die Lösung bei einer Störung der Anfangsdaten $(t_0, \mathbf{y}_0)$ oder der rechten Seite $f(t, \mathbf{y})$?

2.1 Existenz und Eindeutigkeit für Anfangswertaufgaben

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

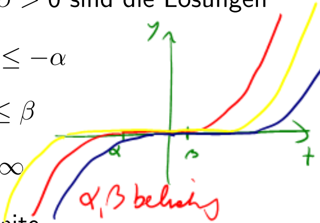
autonom

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \qquad y(0) = 0$$



Diese Gleichung besitzt beliebig viele Lösungen. Für $\alpha, \beta > 0$ sind die Lösungen

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t+\alpha)^2 & : \quad -\infty < t \leq -\alpha \\ 0 & : \quad -\alpha < t \leq \beta \\ \frac{1}{4}(t-\beta)^2 & : \quad \beta < t < \infty \end{cases}$$



Man beachte die folgenden Eigenschaften der rechten Seite.

1. Die rechte Seite ist stetig und beschränkt auf $D = \mathbb{R} \times [-a, a]$, $a > 0$,
2. Die rechte Seite ist auf D nicht Lipschitz–stetig,
3. Die rechte Seite ist bei $y = 0$ nicht differenzierbar.