Bspl 1: $y' = c$ separation

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} c\,d\tau = c(t-t_0)$$

$$y(t) = y(t_0) + c(t-t_0)$$

Bspl 2. $\boxed{y_h'(t) + a(t)\,y_h(t) = 0}$ $\qquad y_h' = -a(t)\,y_h$ Sep.

$$(\ln y_h)' = \frac{y_h'}{y_h} = -a(t)$$

$$= \ln y_h(t) - \ln y_h(t_0) = \int_{t_0}^{t} (\ln y_h(\tau))'\,d\tau = \int_{t_0}^{t} -a(\tau)\,d\tau$$

$$= \ln \frac{y_h(t)}{y_h(t_0)} \Rightarrow \frac{y_h(t)}{y_h(t_0)} = e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} \Rightarrow \boxed{y_h(t) = y_h(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}}$$

Ein Beispiel für eine separierbare Differentialgleichung.

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & -t/y \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right. = (-t) \cdot \frac{1}{y}$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\left(\frac{y^2}{2}\right)' = y\,y' = -t \quad \Rightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \eta d\eta = -\int_{t_0}^{t} \tau d\tau$$

Damit folgt

$$y = \pm\sqrt{r^2 - t^2}$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) \quad \Rightarrow \quad y^2 + t^2 = y_0^2 + t_0^2 = r^2$$

Wir erhalten also als Lösung einen Kreis um den Ursprung in der (t, y)–Ebene mit Radius r^2.

Typ B: Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen.

Eine Differentialgleichung der Form

skalar, 1. Ordnung
explizit

$$y'(t) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

läßt sich mit Hilfe der Substitution

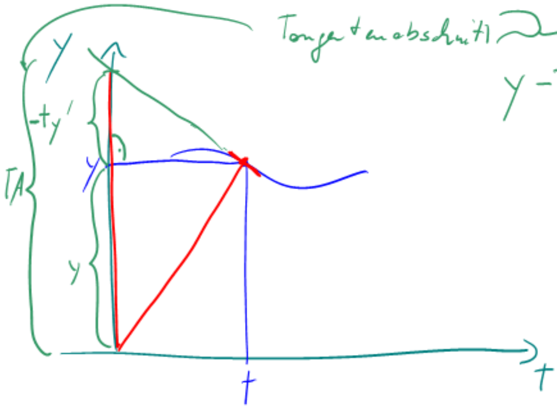
$$u(t) := \frac{y(t)}{t} \qquad y(t) = t\,u(t)$$

auf eine separierbare Gleichung zurückführen. Wir schreiben

$$\boxed{f(u) = y'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t)}$$

Auflösung nach $u'(t)$ ergibt die separierbare Gleichung

$$u'(t) = \frac{f(u) - u}{t} = \frac{1}{t} \cdot \left(f(u) - u\right)$$



$$\overbrace{y - t y'}^{\text{Tangentenabschnitt}} = \overbrace{\sqrt{t^2 + y^2}}^{\text{Abstand vom Ursprung}}$$

Ein Beispiel für eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung.

Gesucht ist die Ortslinie aller Punkte, für die der Tangentenabschnitt auf der y–Achse gleich dem Abstand des Punktes vom Ursprung ist.

Das Problem wird modelliert durch die zugehörige Differentialgleichung

$$y - ty' = \sqrt{t^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{t} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}.$$

[illegible]
[illegible]
[illegible]

$f\left(\frac{y}{t}\right)$

Wir verwenden die Substitution $u = y/t$:

$$u' = -\frac{\sqrt{1+u^2}}{t} = \frac{f(u) - u}{t}$$

Eine Trennung der Variablen liefert zunächst

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dt}{t}$$

und damit

$$\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = -\ln|t| + C_1$$

Fortsetzung des Beispiels.

Aus der Beziehung (siehe Skript Analysis II, Seite 37)

$$\operatorname{arsinh}(u) = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$$

Umkehrfunktion

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

folgt

$$u = \sinh(-\ln|t| + C_1)$$

und damit durch Rücksubstitution

$y(t) = \frac{C}{2} - \frac{t^2}{2C}$

$$u = \frac{y}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{C_1}}{|t|} - |t|e^{-C_1}\right)$$

$y(0) = \frac{C}{2}$

$y(C) = 0$

Wählt man $C = e^{C_1}$, so erhalten wir für $t>0$

$$2y = C - \frac{t^2}{C}$$

$C>0$

und es ergibt sich als Lösung die Parabelschar

$$t^2 = C^2 - 2Cy$$

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = h(t)$$

$$y_p'(t) + a(t)\,y_p(t) = h(t)$$

$$\underbrace{y'(t) - y_p'(t)} + a(t)\underbrace{\left(y(t) - y_p(t)\right)} = \underbrace{h(t) - h(t)}_{0}$$

$$y_h' + a(t)\,y_h = 0$$

y_p Partikulär lösung (irgend eine Lsg)

$$y_h = y - y_p$$

daher $\boxed{y = y_p + y_h}$

Typ C: Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

- Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung sind von der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) = h(t).$$

- Man nennt die Funktion $h(t)$ die Inhomogenität der Gleichung.
- Die Differentialgleichung heißt homogen, falls $h(t) = 0$ gilt. sonst Inhomogen
- Die allgemeine Lösung läßt sich stets in der Form

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

schreiben.

- Dabei ist $y_p(t)$ eine spezielle (oder partikuläre) Lösung, und $y_h(t)$ ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\boxed{y_h'(t) + a(t)y_h(t) = 0}$$

I. Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

Eine Trennung der Variablen

$$y_h'(t) + a(t)y_h(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_h'}{y_h} = -a(t)$$

ergibt mit Hilfe einer Integration

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int a(t)dt$$

die allgemeine Lösung

$$\boxed{y_h(t) = C \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)}$$

$C = y_h(t_0)$

mit einer beliebigen Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}$.

II. Berechnung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

Methode 1

Dazu verwendet man die Methode der Variation der Konstanten

$$y_p(t) = C\boxed{(t)} \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)$$

$$c(t) = h(t)\, e^{+\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt

$$\underbrace{C'(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) - a(t)\cancel{y_p(t)}}_{y_p'(\tau)} \cancel{+ a(t)y_p(t)} = h(t)$$

Durch Integration der Differentialgleichung für $C(t)$ erhalten wir

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} h(\tau) \cdot \exp\left(+\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi\right) d\tau$$

Spezialfälle zur Berechnung einer speziellen Lösung.

Für lineare Gleichungen der Form

$$y'(t) + a \cdot y(t) = h(t) \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

und speziellen Inhomogenitäten $h(t)$ macht man folgende Ansätze:

Methode 2:

Inhomogenität $h(t)$	Ansatz für $y_p(t)$
$\sum_{k=0}^{m} b_k t^k$	$\sum_{k=0}^{m} c_k t^k$
$b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)$	$c \sin(\omega t - \gamma)$
$be^{\lambda t}$	$ce^{\lambda t}$ für $\lambda \neq -a$ $cte^{\lambda t}$ für $\lambda = -a$

Ein Beispiel für einen solchen Spezialfall.

Wir betrachten die Differentialgleichung $a(t) = 1$ $b(t) = \sin t$

$$y'(t) + y(t) = \sin t$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$\boxed{y_h(t) = C \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} 1 \, d\tau\right) = C \cdot \exp\left(t_0 - t\right)}$$

Bei der Variation der Konstanten ist der Ansatz

$$y_p(t) = C(t) \cdot \exp\left(t_0 - t\right)$$

$\sin\tau = \operatorname{Im}(e^{i\tau})$

Ein Einsetzen des Ansatzes ergibt schließlich

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \sin(\tau) \cdot \exp\left(\tau - t_0\right) d\tau = \operatorname{Im}\left[\int_{t_0}^{t} e^{\tau - t_0 + i\tau} \, d\tau\right] = (*)$$

$$(*) = \operatorname{Im}\left(\int_{t_0}^{t} e^{\tau - t_0 + i\tau}\, d\tau\right) = \operatorname{Im}\left[\frac{e^{\tau(1+i) - t_0}}{1+i}\Bigg|_{t_0}^{t}\right] = \dots$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\, e^{t_0 - t} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Fortsetzung des Beispiels.

Nach der Tabelle auf Seite 24 suchen wir eine spezielle Lösung der Form

Ansatz
$$y_p(t) = C \sin(t - \gamma)$$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

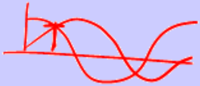
Ein Einsetzen von $y_p(t)$ in die Differentialgleichung ergibt

$$C \cos(t - \gamma) + C \sin(t - \gamma) = \sin t$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme folgt

$$C(\cos t \cos \gamma + \sin t \sin \gamma) + C(\sin t \cos \gamma - \cos t \sin \gamma) = \sin t$$

Wir erhalten also



$$C \cos t \underbrace{(\cos \gamma - \sin \gamma)}_{=0} + C \sin t \underbrace{(\sin \gamma + \cos \gamma)}_{1/C} = \sin t$$

Daraus folgt

$$\gamma = \pi/4 \qquad \text{und} \qquad C = 1/\sqrt{2}$$

Typ D: Bernoullische Differentialgleichungen.

Bernoullische Differentialgleichungen sind von der Form

explizit, 1. Ordnung
skalar, nichtlineare

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)(y(t))^{\alpha} = 0 \qquad \text{mit } \alpha \neq 0, 1$$

linear inhomogen homogen

Sie lassen sich mit der Substitution

$$\underbrace{(1-\alpha)y^{-\alpha}y'}_{u'} + (1-\alpha)a\underbrace{y^{1-\alpha}}_{u} = -(1-\alpha)b\cancel{y^{\alpha}}\cancel{y^{-\alpha}}$$

$$u(t) := (y(t))^{1-\alpha}$$

stets auf lineare Differentialgleichungen zurückführen:

$$u'(t) + (1-\alpha)a(t)u(t) = (\alpha - 1)b(t)$$

Probleme ergeben sich bei der Rücksubstitution

$$y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

1.

Zum Beispiel kann $y(t)$ (in endlicher Zeit) singulär werden.

Ein Beispiel für eine Bernoullische Differentialgleichung.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t) + ty^2(t)$$

$\alpha = 2$

$u = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y}$

Die Substitution $u(t) = 1/y(t)$ ergibt

$$u'(t) + u(t) = -t$$

$a(t) = 1$

$h(t) = -t$

Die allgemeine Lösung $u(t)$ lautet dann

$$u(t) = \underbrace{C \cdot e^{-t}}_{\text{allg. Lsg. homog. Glchg.}} + \underbrace{1 - t}_{\text{spez. Lsg. inhomog. Glchg.}}$$

Nach Rücksubstitution erhalten wir die allgemeine Lösung $y(t)$ in der Form

$$\frac{1}{u(t)} = y(t) = \frac{1}{1 - t + C \cdot e^{-t}} \qquad \text{mit der Konstanten } C$$

Nenner wird in endliche Zeit $= 0$

Mit $y(0) = 2$ existiert die Lösung nur auf dem Intervall $[-1.6783\ldots, 0.7680\ldots]$.

$C = -\frac{1}{2}$

Typ E: Riccatische Differentialgleichungen.

Riccatische Differentialgleichungen sind von der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t)$$

Sie lassen sich nur in speziellen Fällen in geschlossener Form lösen:

Ist eine spezielle Lösung $y_p(t)$ bekannt, so liefert die Substitution

$$u(t) := \frac{1}{y(t) - y_p(t)}$$

beziehungsweise

$$y(t) = y_p(t) + \frac{1}{u(t)}$$

die lineare Gleichung

$$u'(t) - [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u(t) = b(t)$$

Ein Beispiel für eine Riccatische Differentialgleichung.

Wir betrachten die Gleichung

$$y'(t) = -2t + 3ty(t) - ty^2(t),$$

die $y_p(t) = 1$ als spezielle Lösung besitzt.

Die Substitution $u(t) = 1/(y(t) - 1)$ bzw. $y(t) = 1 + 1/u(t)$ liefert

$$\begin{aligned} u'(t) &= -u^2 y' = -u^2(-2t + 3ty(t) - ty^2(t)) \\ &= -u^2 \left(-2t + 3t + \frac{3t}{u} - t - \frac{2t}{u} - \frac{t}{u^2} \right) = -tu(t) + t \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Gleichung ist

$$u(t) = 1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2} \right)$$

und daher gilt

$$y(t) = 1 + \frac{1}{1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2} \right)}$$