Fachbereich Mathematik **WiSe 2014/2015**
Prof. Dr. I. Gasser

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)

18. Februar 2015

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.
Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		

$\sum =$

Aufgabe 1: (6 + 3 + 1 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\boldsymbol{y}}\,(t) \;=\; \boldsymbol{A}\,\cdot\,\boldsymbol{y}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{y}\,(t).$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.

b) Bestimmen Sie die Lösung $\boldsymbol{y}\,(t)$ der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit

$$\boldsymbol{y}\,(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie für diese Lösung $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{y}\,(t)$.

c) Konvergiert die Lösung des Systems aus Teil a) für beliebige Anfangsbedingungen gegen die Nulllösung? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung :

a) Berechnung der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$P(\lambda) := \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)\cdot(\lambda^2-1).$$

$P(\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = -2\,,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1\,.$ **(2 Punkte)**

Berechnung der Eigenvektoren:

$\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 + 2v_3 \\ v_1 + 2v_2 + v_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Zeile $-2\times$ 2. Zeile: $-3v_2 = 0\,.$

Einsetzen von $v_2 = 0$ in die 1. oder 2. Zeile: $v_3 = -v_1\,.$

Zum Beispiel $\boldsymbol{v}^{[1]} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit $\boldsymbol{y}^{[1]}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$ **(2 Punkte)**

$\lambda_2 = -1:$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 + 2v_3 \\ v_1 + v_2 + v_3 \\ -v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Zeile $v_3 = 0$.

Einsetzen von $v_3 = 0$ in die 1. oder 2. Zeile: $v_2 = -v_1$.

Zum Beispiel $\boldsymbol{v}^{[2]} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $\boldsymbol{y}^{[2]}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(1 Punkt)**

$\lambda_3 = 1:$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 + v_2 + 2v_3 \\ v_1 - v_2 + v_3 \\ -v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Zeile $v_3 = 0$.

Einsetzen von $v_3 = 0$ in die 1. oder 2. Zeile: $v_2 = v_1$.

Wir können also zum Beispiel $\boldsymbol{v}^{[2]} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$\boldsymbol{y}^{[3]}(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

wählen.

Die allgemeine Lösung ist: $\boldsymbol{y}(t) = c_1\, \boldsymbol{y}^{[1]}(t) + c_2\, \boldsymbol{y}^{[2]}(t) + c_3\, \boldsymbol{y}^{[3]}(t)$.

b)

$$\boldsymbol{y}(0) = c_1\, e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\, e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\, e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \textbf{(1 Punkt)}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 3 \\ -c_2 + c_3 = -1 \\ -c_1 = -2 \Rightarrow c_1 = 2 \end{cases}$$

Neues System: $\begin{cases} c_2 + c_3 = 1 \\ -c_2 + c_3 = -1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$. **(1 Punkt)**

Addition der ersten beiden Zeilen des ergibt: $c_3 = 0$ und damit folgt $c_2 = 1$.
Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet:

$$\boldsymbol{y}\,(t) \;=\; 2 \cdot \boldsymbol{y}^{\,[1]}(t) \;+\; \boldsymbol{y}^{\,[2]}(t) \;=\; 2e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;+\; e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{y}\,(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(1 Punkt)**

c) Nein, die Lösung aus a)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &= c_1 \cdot \boldsymbol{y}^{[1]}(t) \;+\; c_2 \cdot \boldsymbol{y}^{[2]}(t) \;+\; c_3 \boldsymbol{y}^{[3]}(t) \\ &= c_1\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;+\; c_2\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;+\; c_3\, e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

konvergiert nicht für beliebige Anfangswerte gegen Null. Sie konvergiert genau dann gegen die Nulllösung, wenn die Anfangswerte so beschaffen sind, dass c_3 verschwindet! **(1 Punkt)**

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_2^2 - 2y_1^2 \cdot y_2 \\ 2y_1^3 - y_1^2 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2 \end{pmatrix}.$$

(i) Welche Aussage liefert die Linearisierung über die Stabilität des stationären Punktes $y^* = \binom{0}{0}$ des Systems?

(ii) Prüfen Sie, ob $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ eine Ljapunov-Funktion des Systems im Punkt $y^* = \binom{0}{0}$ ist.

(iii) Was schliessen Sie aus Teil ii) bezüglich der Stabilität des stationären Punktes $y^* = \binom{0}{0}$?

b) Bestimmen Sie alle stationären Punkte des (1×1) Systems

$$y' = f(y) = y^2 - 4$$

und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

Lösung:

a) (i)

$$JF(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -4y_1 \cdot y_2 & 2y_2 - 2y_1^2 \\ 6y_1^2 - 2y_1 \cdot y_2 - y_2 & -y_1^2 - y_1 \end{pmatrix} \implies JF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Linearisierung ist keine Aussage möglich. % **(2 Punkte)**

(ii) Mit $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ gilt $V(0,0) = 0$ sowie
$V(\alpha, \beta) > 0 \qquad \forall (\alpha, \beta) \neq (0,0).$. **(2 Punkte)**
Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla V \cdot f &= 2y_1 \cdot y_2^2 - 4y_1^3 \cdot y_2 + 4y_1^3 \cdot y_2 - 2y_1^2 \cdot y_2^2 - 2y_1 \cdot y_2^2 + \\ &= (2-2)y_1 \cdot y_2^2 + (4-4)y_1^3 \cdot y_2 - 2y_1^2 \cdot y_2^2 = -2y_1^2 \cdot y_2^2 \leq 0. \end{aligned}$$

V ist also eine Ljapunov-Funktion. **(4 Punkte)** .

(iii) Nach Teil ii) ist die Nulllösung stabil. **(1 Punkt)**

b) $y' = f(y) = y^2 - 4 = 0 \implies y_1 = -2,\ y_2 = 2$ **(1 Punkt)**
$Jf(y) = (y^2 - 4)' = 2y$
$Jf(y_1) = -4 \implies y_1$ ist stabil. **(1 Punkt)**
$Jf(y_2) = +4 \implies y_2$ ist instabil. **(1 Punkt)**