Fachbereich Mathematik **SoSe 2015**
Prof. Dr. I. Gasser

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)

28 August 2015

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.
Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		

$\sum =$

Aufgabe 1: 3 + 7 Punkte

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = -\,y^2 \cdot e^{-(x-1)}\,, \qquad y(1) = \frac{1}{3}\,.$$

b) Gegeben sei das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}\,' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}\,(\,\boldsymbol{y}\,) = \begin{pmatrix} -\,4y_1 \,+\, y_2^2 \,-\, 3y_3 \\ y_1^2 \,-\, 3y_2 \,+\, y_3^2 \\ 2y_1 \,-\, 4y_2^4 \,+\, y_3 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie den Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{y}^{\,*} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf Stabilität.

Lösung:

a)

$$\frac{dy}{dx} = -\,y^2 \cdot e^{-(x-1)} \iff \int \frac{dy}{-y^2} = \int e^{-(x-1)}\,dx$$

$$\iff \frac{1}{y} = -\,e^{-(x-1)} + C \iff \qquad\qquad y = \frac{1}{C \,-\, e^{-(x-1)}}$$

$$y(1) = \frac{1}{3} \implies C = 4.$$

b) $$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{f}\,(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} -4 & 2y_2 & -3 \\ 2y_1 & -3 & 2y_3 \\ 2 & -16y_2^3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \boldsymbol{A} := \boldsymbol{J}\ \boldsymbol{f}\,(0,0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Eigenwertberechnung:

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) \;&=\; \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -3\;-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&=\; (-3-\lambda)\det \begin{pmatrix} -4-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \;= \\
&=\; (-3-\lambda)\cdot[(-4-\lambda)(1-\lambda)\;+\;6)] \\
&=\; (-3-\lambda)(\lambda^2+3\lambda+2)\,. \qquad [\textbf{2 Punkte}]
\end{aligned}$$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) \;=\; 0 \implies \lambda = -3 \vee \big(\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \iff (\lambda = -1 \vee \lambda = -2)\big)$$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{J}\;\boldsymbol{f}\,(0,0,0)$ sind also

$$\lambda_1 \;=\; -1, \qquad \lambda_2 \;=\; -2, \qquad \lambda_3 \;=\; -3. \qquad [\textbf{2 Punkte}]$$

Die Realteile aller Eigenwerte sind negativ. Der stationäre Punkt ist asymptotisch stabil. [**1 Punkt**]

Aufgabe 2: Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems.

c) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit

$$\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze Aufgabe 2:

a)

$$\det \begin{pmatrix} -6-\lambda & -4 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)^2 + 4.$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix sind gegeben durch

$$(-6-\lambda)(2-\lambda) + 20 = 0 \iff \lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0\,.$$

Quadratische Ergänzung oder pq-Formel liefern

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm 2i\,. \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

Zum Eigenwert $\lambda_1 = -2+2i$ errechnet man den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} -4-2i & -4 \\ 5 & 4-2i \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff ((-4-2i)v_1 - 4v_2 = 0) \wedge (5v_1 + (4-2i)v_2 = 0).$$

Aus der ersten Gleichungen folgt $v_2 = (-1 - \frac{i}{2})v_1$.

Die zweite Gleichung liefert (erwartungsgemäß) keine weitere Bedingung.

Als Eigenvektor können wir also

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2-i \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

wählen und erhalten die zugehörige Fundamentallösung

$$\boldsymbol{z}^{[1]}(t) = e^{(-2+2i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2-i \end{pmatrix} = e^{-2t}(\cos(2t) + i\sin(2t)) \begin{pmatrix} 2 \\ -2-i \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1Punkt)}$$

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) + i2\sin(2t) \\ -2\cos(2t) - i2\sin(2t) - i\cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$$

und damit die reellen Lösungen **(1Punkt)**

$$\boldsymbol{y}^{[1]}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ -2\cos(2t)+\sin(2t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}^{[2]}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ -2\sin(2t)-\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}_h(t) = c_1\,\boldsymbol{y}^{[1]}(t) + c_2\,\boldsymbol{y}^{[2]}(t).$$

b) Zur Lösung des inhomogenen Systems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

machen wir mit konstanten Zahlen a, b den Ansatz $\boldsymbol{y}^{[p]} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = -6a - 4b + 2 & \Longleftrightarrow 4b = -6a + 2 \\ 0 = 5a + 2b - 3 & \overset{2b=-3a+1}{\Longleftrightarrow} 2a - 2 = 0,\ a = 1,\ b = -1 \end{cases}$$ **(2 Punkte)**

$\boldsymbol{y}^{[p]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist also eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems.
Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_h(t) + \boldsymbol{y}^{[p]}(t) = c_1\,\boldsymbol{y}^{[1]}(t) + c_2\,\boldsymbol{y}^{[2]}(t) + \boldsymbol{y}^{[p]}(t).$$

c)

$$\boldsymbol{y}(0) = c_1 e^0 \begin{pmatrix} 2\cos(0) \\ -2\cos(0)+\sin(0) \end{pmatrix} + c_2 e^0 \begin{pmatrix} 2\sin(0) \\ -2\sin(0)-\cos(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2c_1 + 1 = 1 \Longrightarrow c_1 = 0 \\ -2c_1 - c_2 - 1 = -2 \Longrightarrow c_2 = 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ -2\sin(2t)-\cos(2t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$ **(2 Punkte)**