Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Hinweis: Der in der Vorlesung zuletzt behandelte Stoff wird in Teil c) abgefragt. In den anderen Teilen werden einige Techniken der vorangegangenen Übungsblätter benötigt. Die Aufgabe eignet sich daher gut zur Überprüfung Ihrer Kenntnisse.

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$x^2 y'' - x\,y' + y = h(x) \qquad x \in]1,3[$$

$$\begin{aligned} y(1) + \alpha y'(1) &= \gamma_1 \\ y(3) - 3y'(3) &= \gamma_2 \qquad \alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^2 y'' - x\,y' + y = 0 \qquad x \in]1,3[$$

indem Sie zunächst eine Lösung mit Hilfe des Ansatzes $y^{[1]}(x) = x^k$ ermitteln.
Bestimmen Sie dann eine zweite Lösung mit Hilfe des Reduktionsansatzes
$y^{[2]}(x) = y^{[1]}(x) \cdot w(x)$.

b) Berechnen Sie die Wronski-Determinante des äquivalenten Systems für $x = 1$.

c) Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[1,3]$ stetige Funktionen $h(x)$ eindeutig lösbar?

d) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe für $h(x) = x^2$ mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Aufgabe 2:

Gegeben ist das Variationsproblem: Minimiere das Funktional

$$I[y] := \int_0^1 e^{2t} \left(yt - \frac{1}{4}(y')^2 \right) dt$$

unter allen C^1-Funktionen $y = y(t)$ mit $y(0) = 0$ und $y'(1) = 0$.

Stellen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Differentialgleichung auf und lösen Sie die sich daraus ergebende Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} y''(t) + 2y'(t) &= -2t\,, \\ y(0) = 0, \quad y'(1) &= 0. \end{aligned}$$