Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Die folgende Differentialgleichung beschreibt näherungsweise die Bewegung eines gedämpften Schwingers (vgl. auch Blatt 0):

$$m \cdot x''(t) + r \cdot x'(t) + d \cdot x(t) = 0.$$

Hierbei stehen m für die Masse, r für den Reibungskoeffizienten und d für die Federkonstante der rückstellenden Federkraft.
Die Koeffizienten werden üblicherweise als konstant angenommen. Nehmen zum Beispiel die Masse und/oder der Reibungskoeffizient zeitabhängig (etwa in Folge von Vereisung des Schwingers) zu, so erhält man eine Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten.

Im folgenden modellieren wir eine monotone Zunahme des Reibungskoeffizienten in einem bestimmten Zeitintervall $[t_0, t_1]$ durch die Wahl $r(t) = 4t$ und eine monotone Zunahme der Masse durch die Multiplikation von m mit $(1 + t^2)$, und erhalten für $m = 1, d = 2$ die Gleichung

$$(1 + t^2)x''(t) + 4t \cdot x'(t) + 2 \cdot x(t) = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $x^{[1]}(t) := \dfrac{t}{1+t^2}$ eine Lösung dieser Gleichung ist.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Reduktionsansatzes eine zweite (von $x^{[1]}(t)$ unabhängige) Lösung und damit ein Fundamentalsystem.

Aufgabe 2: Ermitteln Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden linearen Differentialgleichungen. Geben Sie reelle Darstellungen der Lösungen an.

a) $$y'' + 4\,y' + 4\,y = (12\,t + 1)e^{-2t}\,.$$

b) $$y^{(3)} - y'' + 9\,y' - 9\,y = \sin(t)\,.$$

Hinweis : Sie können für die partikulären Lösungen der inhomogenen Aufgaben spezielle Ansätze verwenden.

Abgabetermine: 08.12.-12.12.2014 oder 05.01.-09.01.2015