

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 0, Präsenzübung

Aufgabe:

Die Lage eines Schwingers (zum Beispiel eines Zylinders, befestigt an einer Feder), der sich in einer zähen Flüssigkeit bewegt, soll durch eine mathematische Gleichung beschrieben werden. Wir bezeichnen mit $y(t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage. In einem einfachen Modell wird angenommen, dass nur

- eine zur Auslenkung proportionale Rückstellkraft $F = -D \cdot y(t)$, $D \geq 0$ und
- eine zur Geschwindigkeit proportionale Dämpfungskraft $\tilde{F} = -\mu \cdot y'(t)$, $\mu \geq 0$

auf den Kolben wirken.

Nach dem Newtonschen Gesetz der Mechanik gilt:

$$\text{Masse (m)} \cdot \text{Beschleunigung (} y''(t) \text{)} = \sum \text{ aller einwirkenden Kräfte.}$$

- a) Durch welche Differentialgleichung wird diese gedämpfte Schwingung beschrieben?
- b) Wie lautet die Differentialgleichung aus a) im ungedämpften Fall $\mu = 0$ eines Kolbens mit der Masse $m = 50 \text{ kg}$ wenn $D = 200 \text{ N/m}$ gilt?
 - (i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$ mit beliebigen reellen Zahlen c_1 und c_2 diese Differentialgleichung lösen.
 - (ii) Welche Lösung(en) erhält man, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit $y'(0) = 0 \text{ m/s}$ vorgibt?
Können Sie die Position des Zylinders zu einem vorgegebenen Zeitpunkt (zum Beispiel $t = 10$) angeben?
 - (iii) Welche Lösung(en) erhält man, wenn man zusätzlich die Anfangsauslenkung $y(0) = 0.5 \text{ m}$ vorgibt?
- c) Gesucht seien nun die Lösungen der Differentialgleichung
$$200 \cdot y''(t) = -40 \cdot y'(t) - 202 \cdot y(t).$$
Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(t) = k e^{\lambda t}$, $k, \lambda \in \mathbb{C}$ konstant, Lösungen dieser Differentialgleichung.

Bearbeitungstermine: 13.10.-17.10.2014