Prof. Dr. H. J. Oberle

Klausur zur Mathematik III

(Modul: Differentialgleichungen I)

7. Februar 2013

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IIW	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	

Wertung nach DPO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		

$\sum =$

Aufgabe 1:

a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) \;+\; 4t\,y(t) \;=\; e^{-2t^2}\;\cos(t)\,.$$

b) Bestimmen Sie mittels Laplace-Transformation die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y''(t) + \;y'(t) = \;h_2(t)\,\delta(t-2)$$

mit

$$y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Dabei bezeichne δ die Diracsche Delta Distribution.

Lösung:

a) $y'(t) \;+\; 4t\,y(t) \;=\; e^{-2t^2}\;\cos(t)\;.$

Lösung der homogenen Aufgabe:

$$\frac{dy_h}{dt} \;=\; -4t\cdot y_h \iff \int \frac{dy_h}{y_h} \;=\; -\int 4t\,dt \iff \ln|y_h| \;=\; -2t^2 + k \implies$$

$y_h = c\cdot e^{-2t^2},\qquad c\in\mathbb{R}$ **[2 Punkte]**

Lösung der inhomogenen DGL (Variation der Konstanten)

$y_p(t) := c(t)e^{-2t^2} \stackrel{DGL}{\longrightarrow} c'(t)e^{-2t^2} \stackrel{!}{=} e^{-2t^2}\,\cos(t).$ **[1 Punkt]**

Wir erhalten also mit

$c'(t) = \cos(t)$ z.B. $c(t) = \sin(t),\qquad y_p(t) = \sin(t)e^{-2t^2}$

und

$y(t) = (c + \sin(t))\;e^{-2t^2}$ **[2 Punkte]**

b) Es sei $Y = L(y)$ das Bild von y unter der Laplace-Transformation ($y \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y$).

Dann gilt $y' \circ\!\!-\!\!\bullet\; sY - y(0) \;=\; sY\,,$

$y'' \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2Y - sy(0) - y'(0) \;=\; s^2Y\,,\qquad \delta(t-2) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-2s}$

Die Laplace Transformation der Gleichung ergibt also

$$s^2Y(s) + sY(s) = e^{-2s}.$$ **[2 Punkte]**

Damit ist also

$$(s^2+s)Y(s) \;=\; e^{-2s} \iff Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)}$$ **[1 Punkt]**

Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{s(s+1)}$:

$$\frac{1}{s(s+1)} \;=\; \frac{a}{s} \;+\; \frac{b}{s+1} \longrightarrow a(s+1) + bs = 1$$

$$s = 0 \implies a = 1,\qquad s = -1 \implies b = -1\,.$$ **[1 Punkt]**

Wir erhalten also

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = 1 - e^{-t}.$$

Mit der (inversen) Verschiebungseigenschaft der Laplace Transformation, also

$$L^{-1}\left(U(s)e^{-as}\right) = h_a(t)u(t-a)$$

ist mit $a = 2$

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s(s+1)}\right) = h_2(t)\left(1 - e^{-(t-2)}\right) \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

ALTERNATIV: $z = y'$, Differentialgleichung erster Ordnung transformieren, nach der Rücktransformation integrieren und an Anfangswert anpassen.

Aufgabe 2:

a) Gegeben ist das Variationsproblem: Minimiere das Funktional

$$I[y] := \int_0^1 e^{2t} \left(yt - \frac{1}{4}(y')^2 \right) \, dt$$

unter allen C^1-Funktionen $y = y(t)$ mit $y(0) = 0$.

Stellen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Differentialgleichung auf und geben Sie die natürliche Randbedingung an.

b) Lösen Sie die Randwertaufgabe

$$y''(t) + 2y'(t) = -2t\,,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Lösung:

a) Sei $f(t, y, y') := e^{2t} \left(yt - \frac{1}{4}(y')^2 \right)$, dann gilt
$f_y = t\,e^{2t}\,, \qquad f_{y'} = e^{2t} \left(-\frac{1}{2}\, y' \right)$ **[1 Punkt]**
und
$\frac{d}{dt} f_{y'} = e^{2t} \left(-\frac{1}{2}\, y'' \right) + 2e^{2t} \left(-\frac{1}{2}\, y' \right)\,.$ **[1 Punkt]**
Damit lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = e^{2t} \left(t + \frac{1}{2} y'' + y' \right) = 0\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Natürliche Randbedingung:
$f_{y'}(1) = e^2 \left(-\frac{1}{2}\, y'(1) \right) \overset{!}{=} 0 \implies y'(1) = 0\,.$ **[1 Punkt]**

b)

$$y'' + 2y' = -2t$$
$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Die Differentialgleichung kann direkt oder mit der Substitution $z = y'$ gelöst werden.

Variante A)

Wir bilden das charakteristische Polynom der homogene DGL:

$$y'' + 2y' = 0 \implies \lambda^2 + 2\lambda = 0$$
$$\implies \lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = -2. \; \textbf{[1 Punkt]}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet daher

$$y_h = c_1 + c_2 e^{-2t}. \; \textbf{[1 Punkt]}$$

Als speziellen Ansatz für die partikuläre Lösung wählen wir

$$y_p = t(a + bt) \implies y_p' = 2bt + a, \quad y_p'' = 2b.$$

Einsetzen in die DGL liefert die Bedingung

$$2b + 2a + 4bt = -2t \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{1}{2},\ a = \frac{1}{2}.\ \textbf{[1 Punkt]}$$

Damit gilt

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2}\,, \qquad y'(t) = \ -2c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} - t.$$

Die Randbedingung $y(0) \stackrel{!}{=} 0$ liefert $c_2 = -c_1$, **[1 Punkt]**
und die Randbedingung $y'(1) = 0$ führt zu

$$y'(1) = -2c_2 e^{-2} + \frac{1}{2} - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = -\frac{e^2}{4},\ \textbf{[1 Punkt]}$$

also insgesamt

$$y(t) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} e^{-2t+2} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2}.\ \textbf{[1 Punkt]}$$

Variante B)

$y' = z\,, \qquad z' + 2z = -2t$ **[1 Punkt]**

$\dfrac{dz_h}{dt} = -2z_h \Longleftrightarrow \dfrac{dz_h}{z_h} = -2dt \Longleftrightarrow \ln z_h = -2t$

$z_h = ke^{-2t}$ **[1 Punkt]**

Ansatz: $z_p := a + bt$

Einsetzen in $z' + 2z = -2t$ liefert:

$b + 2a + 2bt = -2t \Longleftarrow b = -1,\ a = \frac{1}{2}$ **[1 Punkt]**

Damit erhalten wir $z = ke^{-2t} - t + \frac{1}{2} = y'$ und

$y = \frac{k}{-2}e^{-2t} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + C$ **[1 Punkt]**

Bestimmung von k und C analog zu Variante A): **[2 Punkte]**